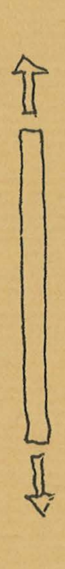
EQUILIBRIO DE SÓLIDOS DEFORMABLES

UNA INTRODUCCIÓN BÁSICA

por

MARIANO VÁZQUEZ ESPÍ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

EQUILIBRIO DE SÓLIDOS DEFORMABLES

UNA INTRODUCCIÓN BÁSICA

por

MARIANO VÁZQUEZ ESPÍ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Eqilibrio de sólidos deformables

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 2.02
ISBN: 84-920297-5-7
Depósito Legal: M-35395-1997

1 MATERIALES Y MÉTODO

El presente texto se escribió como documento de apoyo a la asignatura *Mecánica de sólidos y sistemas estructurales* del nuevo Plan 96 de la Escuela de Madrid. Su objetivo es introducir los conceptos fundamentales del equilibrio estático de cuerpos deformables, salvo el importantísimo de la estabilidad de las construcciones. El diseño de estructuras (y sobre todo el preliminar, el que se realiza en las primeras fases de proyecto) requiere del proyectista una fina intuición que sólo puede alcanzarse al cabo de años de una experiencia dirigida por propósitos claros. De ahí la necesidad de introducir desde el primer momento un *mapa* completo (aunque no detallado) de la disciplina, donde poder ubicar los conocimientos de cursos siguientes.

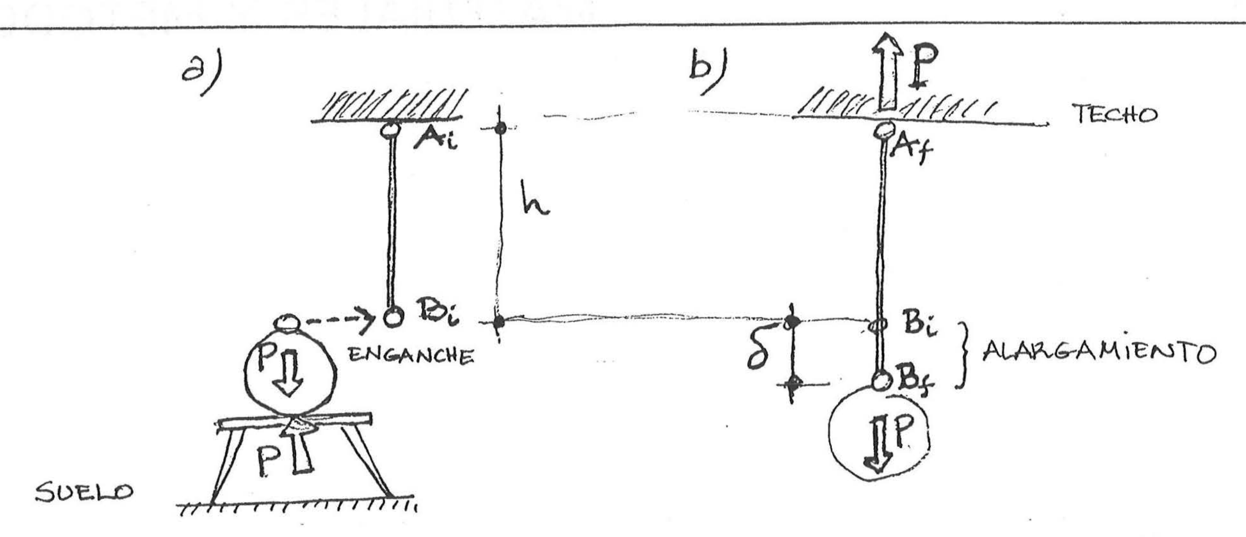
La resolución de los problemas que se propone la teoría de estructuras es a un tiempo sencilla y complicada. Sencilla en cuanto a los conceptos empleados que son relativamente pocos. Complicada en cuanto al número de operaciones matemáticas a realizar para obtener una solución, número que aumenta con la complejidad geométrica de la estructura. En esta primera parte se presentan *todos los conceptos empleados* aplicados a una estructura extremadamente simple. En la segunda, los conceptos que acompañan al de equilibrio estático se examinan con mayor detalle.

§1.1 El problema

Sea la simple estructura de la figura 1.1: el cable AB mantiene suspendida una lámpara de peso **P**. Las *acciones* se reducen al peso de la lámpara (donde puede estar o no incluido el peso del cable que generalmente será tan pequeño que puede despreciarse). Consideremos como estructura el cable AB exclusivamente: se trata de un cilindro de longitud **h** y diámetro **d**, y, por tanto, de área transversal $\mathbf{A} = \pi \cdot \mathbf{d}^2/4$. Todos los puntos de la estructura pueden moverse salvo el A, por el cual la estructura esta sujeta al techo que supondremos inamovible. El punto A es un *vínculo*. Se trata, de hecho, de una *articulación*: un artefacto que fija un punto pero que permitiría girar la barra AB alrededor de A si fuera necesario. Acciones y vínculos son datos conocidos *a priori*.[1]

---

[1] Esto es cierto porque hemos supuesto el peso del cable despreciable. Si no fuera así, el peso propio de la estructura constituye una parte de las acciones que esta debe soportar, parte desconocida hasta que no se conoce la estructura. Esto mismo pasa con todas las acciones que dependen de la forma de la estructura, la acción del



En **a** se representa la posición inicial del cable y del peso; en **b**, la posición final, de equilibrio, tras colgar el peso.

Figura 1.1: Un cable del que cuelga una lámpara.

La construcción de este *sistema* implica colgar primero el cable del techo, luego la lámpara del cable. Al final del proceso o bien el conjunto permanecerá quieto, o bien la lámpara, o la lámpara y el cable, caerán al suelo en movimiento uniformemente acelerado. La primera situación es obviamente la deseable y se conoce bajo el nombre de *equilibrio estático*. Para alcanzar el equilibrio estático es necesario, sin embargo, un pequeño movimiento que se inicia en el momento en que la lámpara se cuelga del cable, y que cesa muy rápidamente, quedando el extremo B en una posición algo por debajo de la inicial. La nueva posición se denomina *posición de equilibrio*. Que en las estructuras corrientes ese descenso no sea apreciable no debe hacer creer que no exista. Basta que el cable sea un muelle muy *flexible* para que pueda verse el descenso. En un cable de acero el descenso es inapreciable pero existe. Y de no existir, como se verá, sería imposible que el cable soportara la lámpara.

Durante el uso de las estructuras no sólo se desea que estén en equilibrio estático, se requiere además que lo estén con cierto margen. Es decir, que la situación contraria, ruina o colapso de la estructura esté lejos del uso que se prevee para ella. Este margen se expresa a través de una serie de requisitos: resistencia, rigidez y estabilidad.

Supóngase que el *requisito de resistencia* se exprese en este caso diciendo que el cable debe soportar sin romperse lámparas de un peso doble al de la lámpara que realmente se colgará de él. Se dice entonces que la estructura debe tener un *coeficiente de seguridad* γ igual a 2.

El *requisito de rigidez* limita los desplazamientos de la estructura. Las razones aquí son muy variadas: la lámpara no debe descender tanto que tope con el suelo; los hilos de la instalación eléctrica o sus conexiones puedan verse afectados por un alargamiento excesivo del cable; etc. Por todo ello el descenso del punto **B** producido por el peso **P** no debe ser mayor que un cierto valor de desplazamiento *tolerable* $\boldsymbol{\delta}_{tol}$ (su valor debe fijarse a la vista del tipo de estructura y de su uso, y en la práctica real existe una fastidiosa ambigüedad al respecto).

---

viento por ejemplo. Menos corriente, pero también posible, es que los vínculos sean desconocidos o que su naturaleza cambie a lo largo de la vida de la estructura.

Por último, el *requisito de estabilidad* exige que si se aparta la lámpara ligera y momentáneamente de su posición de equilibrio no se produzca la rotura de la estructura sino que, por el contrario, la lámpara recupere su posición inicial. Esta exigencia se aplica también a cualquier pequeña variación en los datos de partida: el peso de la lámpara, la longitud del cable, etc, en definitiva pequeñas variaciones respecto al uso previsto.

Todos los parámetros que definen cuánto de exigentes son los requisitos enunciados -el *coeficiente de seguridad* γ, el *alargamiento tolerable* δ_{tol}-, son también datos previos elegidos en función de diversas consideraciones: el uso, la calidad, las disposiciones constructivas, las reglamentaciones administrativas, etc.

El problema que resuelve la teoría de estructuras puede enunciarse de dos maneras distintas:

> Conocida parte de la geometría de la estructura, (la longitud **h** del cilindro, por ejemplo), calcular el valor del resto de las variables que la definen (el diámetro **d** en nuestro caso), de manera que se cumplan todos los requisitos. Este problema se conoce como *dimensionado de la estructura*, y es un caso particular del problema más general de *diseño de una estructura*.
>
> Conocida completamente la geometría, comprobar que los requisitos estructurales se cumplen. Problema conocido como *peritaje* o *comprobación de la estructura*. En este problema es necesario el *análisis de la estructura*, dada su definición completa, para predecir su comportamiento.

Las variables fundamentales del problema estructural son, en ambos casos, las *dimensiones de la estructura*, su geometría (longitud y diámetro del cilindro AB). Como se verá la solución del problema exigirá el cálculo de otras variables auxiliares, que no deben confundirse con las fundamentales.

En los problemas de dimensionado se trata de determinar uno de los valores posibles de las variables: si el diámetro $\mathbf{d}_{min}$ es el mínimo valor que satisface los requisitos, también se cumplirán con cualquier otro diámetro mayor.[2] En los problemas de comprobación, basta con que los valores de las variables elegidos previamente satisfagan los requisitos: por ejemplo, si un cierto cable de diámetro **d** no se rompe bajo un peso 4·**P**, la estructura es segura -más de lo necesario-. Por tanto, el problema estructural es, en general, indeterminado: existen siempre varias soluciones *aceptables*.

Si además de los requisitos anteriores se considera algún requisito adicional (que la estructura tenga la menor cantidad de material posible, el menor coste posible, etc.), el conjunto de valores de las variables que resuelven el problema se restringe. Si, por ejemplo, se persigue que el cable AB tenga el menor volumen posible, solo el valor $\mathbf{d}_{min}$ del diámetro cumple el nuevo requisito. Cualquier otro diámetro mayor, satisface los requisitos estructurales, pero no el requisito adicional de volumen mínimo. Sólo requisitos adicionales pueden determinar una única solución, y no siempre. Cuando intervienen éstos el

---

[2] Pero si se supuso que el peso del cable era despreciable, no podrá elegirse para dimensionarlo un diámetro **d** tan grande que contradiga esa hipótesis inicial.

problema se denomina más propiamente de *optimación de la estructura* y la solución, *solución óptima*. Estos requisitos adicionales intervienen siempre en mayor o menor medida aunque no se hagan explícitos: si es posible determinar el valor $\mathbf{d}_{min}$ y se dispone de un cierto *catálogo* de cables en el mercado, se elegirá siempre el cable del catálogo de menor diámetro que cumpla $\mathbf{d} \geq \mathbf{d}_{min}$: normalmente no habrá ninguna razón para escoger un cable mayor.

§1.2 Equilibrio estático

La solución del problema estructural planteado parte del único hecho evidente: la lámpara esta quieta, no se mueve, y el sistema mecánico formado por la lámpara, el cable (la estructura en nuestro caso), y el techo se encuentran en *equilibrio estático*. Es evidente que, para que eso ocurra, el cable AB debe ejercer sobre la lámpara una fuerza igual y opuesta al peso **P**. El cable "tira" de la lámpara hacia arriba y la lámpara "tira" del cable hacia abajo: tras colgar la lámpara la distancia entre A y B aumenta: el cable se alarga sin romperse y se dice que está *traccionado*, véase la figura 1.1.

El requisito de seguridad, con $\gamma = 2$, se comprueba si se puede demostrar que el cable es capaz de soportar sin romperse una fuerza 2**P** o, bien, que puede soportar una fuerza **P** con seguridad 2. Esa demostración depende en primer lugar del área del cable (de su geometría): un cable con más área resistirá más. Pero, en segundo lugar, del material del que esté hecho: resulta evidente que un cable de acero resiste más carga que una cuerda de cáñamo de igual área. El equilibrio estático permite determinar la fuerza que ha de soportar el cable pero sólo la consideración de las propiedades mecánicas del material permitirá demostrar que se satisface el requisito de seguridad.

Que el cable en cuestión experimente mayor o menor alargamiento depende igualmente del material: fácil es adivinar que un cable de goma elástica (de las de sujetar el pelo) se alargará más que el de acero, si ambos son de igual área y longitud.

Únicamente el requisito de estabilidad puede, en este caso, comprobarse sin más consideración que la de la geometría de la estructura: es fácil imaginar que si, fortuitamente, la lámpara se desplaza ligeramente a derecha o izquierda, tras un balanceo más o menos largo (un movimiento oscilatorio), acabará por pararse en la posición de partida.

La conclusión es, por tanto, que aunque sobre la noción de equilibrio estático se fundamenta el método general de solución del problema, antes de poder abordarlo será necesario hacer algunas averiguaciones acerca de los materiales y de su comportamiento mecánico.

§1.3 Comportamiento básico de los materiales

Para poder predecir el comportamiento del cable AB sólo existe el procedimiento de experimentar con él y suponer que su comportamiento será igual en el futuro si se reprodujera el experimento, es decir, suponer que el comportamiento obedece a una cierta ley invariable que con el experimento se intenta determinar.

La manera más simple de proceder en este caso será colgar del cable pesas de peso **p** (bastante más pequeño que **P**) hasta que el cable se rompa. El cable ensayado tendrá una cierta longitud **h** y una sección transversal de cierto área **A**. Si tras poner cada nueva pesa **i** se anota el alargamiento experimentado (la diferencia δ entre la longitud L_i, alcanzada al añadir cada nueva pesa **i**, y la inicial, $L_0 = h$) se dispondrá de datos suficientes para verificar la resistencia (carga que produce la rotura o *carga última*) y la *rigidez* (relación entre la carga aplicada y el alargamiento experimentado). La información puede mostrarse en lo que se suele denominar gráfica carga desplazamiento.

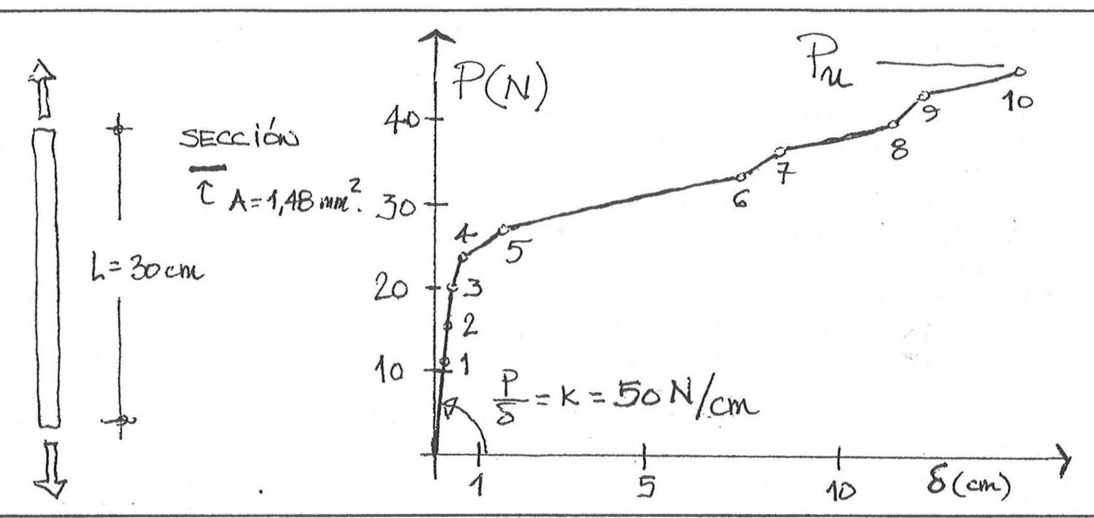


Figura 1.2: Ensayo de un trozo de cinta adhesiva.

Como se ve en la figura 1.2, la ley no es en principio simple: el cable rompe bajo una carga P_u y la relación entre cada valor de **P** y el alargamiento δ es una curva de geometría compleja, salvo al principio en que resulta ser una recta, lo que indica que para cargas pequeñas hay proporcionalidad entre cargas y desplazamientos, proporcionalidad que desaparece conforme aumenta la carga: cada nueva pesa que se añade provoca un incremento de longitud proporcionalmente mayor que las anteriores.

Parece razonable suponer que el material del cable tenga propiedades intrínsecas de valor constante e independiente de la definición geométrica del cable ensayado. Para ello será necesario usar parámetros que permitan describir el comportamiento del material sin referencia alguna a la geometría del cable ensayado, es decir, que permitan separar las propiedades mecánicas del material de las geométricas. En el caso del cable, un cilindro, será necesario eliminar de la descripción el área de la sección **A** y su longitud **h**.

§1.4 Tensión

Si ensayamos, no un cable, sino dos a la vez puestos *uno al lado del otro*, en exactamente las mismas condiciones en que se ensayó uno sólo, la carga de rotura será doble. Lo mismo ocurrirá con **n** cables yuxtapuestos, la carga de rotura será $n \cdot P_u$. En todos esos ensayos la propiedad que permanece inalterada, y que por tanto es atribuible exclusivamente a la naturaleza del material, es la relación entre la carga aplicada y el área de la sección del conjunto de cables, cuyo valor en todos los casos es P_u/A.

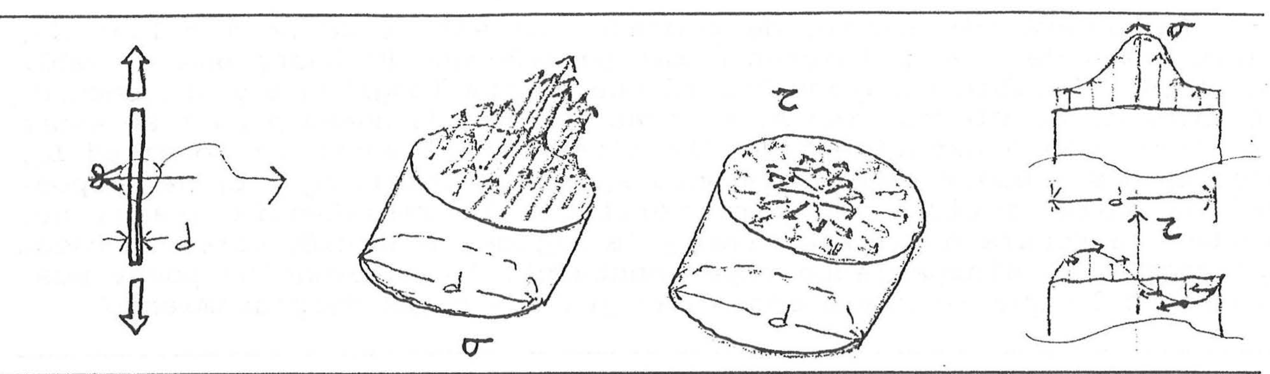


Figura 1.3: Sección de un cable sometido a tensión.

La interpretación física de esta propiedad del material no es difícil, véase la figura 1.3. *Cortemos* imaginariamente el cable en cualquier punto de su longitud. El equilibrio estático predice que sobre la sección del cable actúa una fuerza **P**. Si miramos más de cerca la sección, la podemos imaginar dividida en tantos *cablecitos* como unidades de superficie tenga (tantos centímetros cuadrados como tenga, por ejemplo), sobre los que actúan pequeñas fuerzas paralelas a **P** cuya suma vectorial debe ser, naturalmente, **P**. Nada permite afirmar que esas pequeñas fuerzas no varíen de un sitio a otro de la sección, pero si fueran iguales su valor sería precisamente **P/A**. Y aunque sean distintas su valor medio será, en cualquier caso, **P/A**. Esas pequeñas fuerzas aplicadas por unidad de superficie reciben el nombre de *tensiones normales* -por actuar según la normal a la superficie del corte- y su valor medio, *tensión normal media* σ.

La descomposición de **P** desgraciadamente no es única: además de la distribución de tensiones normales podría existir una distribución de pequeñas fuerzas *tangentes* a la superficie con la condición de que su suma fuera nula. Esas fuerzas se conocen como *tensiones tangenciales*, y si su suma es nula, su valor medio τ también será nulo. *Si se conviene en manejar únicamente* valores medios de la tensión, podremos afirmar que la fuerza **P** sólo produce tensión normal σ de valor medio **P/A**, siendo la tensión tangencial media τ nula. Al valor P_u/A, se le denomina *tensión de rotura* del material, σ_u.

La tensión normal se expresa en las mismas unidades que una presión, fuerza en cada unidad de superficie. De hecho, la presión que ejerce un fluido sobre un sólido produce tensiones normales de igual valor en la superficie de contacto. La tensión tangencial, expresada en las mismas unidades, se distingue de la normal sólo en la dirección en la que actúa respecto a la superficie considerada. El rozamiento entre dos sólidos produce tensiones tangenciales en la superficie entre ambos.

§1.5 Deformación

Si en vez de colocar dos cables de la misma longitud uno al lado del otro, los colocamos *uno a continuación del otro*, de modo que el enganche del segundo al primero sea en todo igual al del primero al techo, el alargamiento experimentado por el conjunto bajo una cierta carga **P** será doble que en el caso de un único cable. Si colocamos **n** cables, el alargamiento del conjunto será $\mathbf{n}\cdot\delta$, siendo δ el alargamiento de uno ellos para la carga **P**. Ahora, la propiedad que es igual en todos

estos ensayos resulta ser la relación entre el alargamiento y la longitud total del conjunto de cables, de valor **δ/h** en todos los casos.

La interpretación física de esta nueva propiedad tampoco es difícil. Cortemos el cable (o un conjunto de ellos) en tantos trozos como unidades de longitud tenga inicialmente (en tantos centímetros, por ejemplo). Si para la carga **P** experimenta un alargamiento total **δ**, cada trozo unitario habrá experimentado un pequeño alargamiento, y la suma de todos ellos nos dará el alargamiento total. De nuevo no es posible asegurar que todos los trozos se alarguen lo mismo, pero si lo hicieran, cada pequeño trozo se alargaría **δ/h**, que en cualquier caso sería el valor medio experimentado por el conjunto de los trozos. Dicho valor recibe el nombre de *deformación unitaria* ϵ.

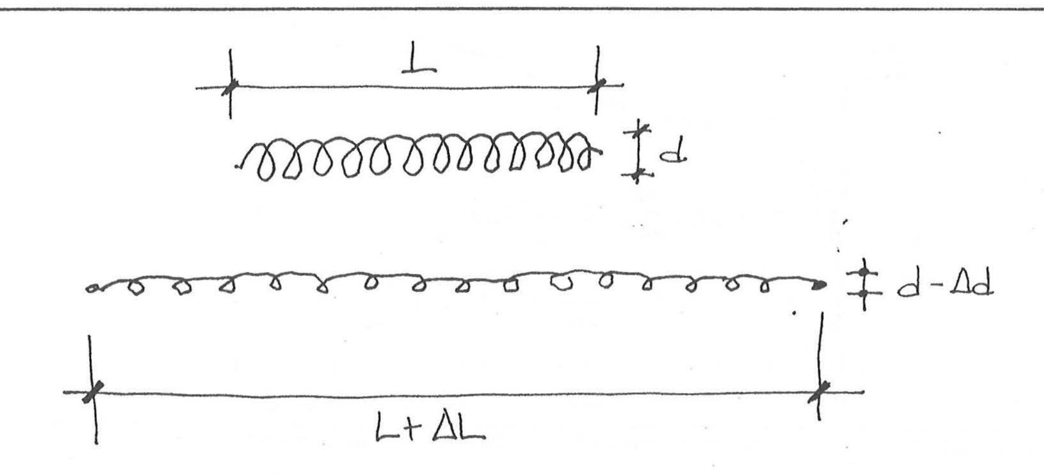


Figura 1.4: Alargamiento y contracción lateral en un muelle.

Como en el caso de las tensiones, ni el alargamiento **δ** ni la deformación longitudinal ϵ son los únicos desplazamientos que experimenta cada punto del cable: conforme el cable se alarga, su diámetro disminuye. Si para los materiales comunes el alargamiento longitudinal es inapreciable, el acortamiento transversal, normalmente un orden de magnitud menor, lo es mucho más. Pero si se ensaya un muelle hasta someterlo a un alargamiento grande se podrá observar como conforme se estira, el diámetro de su espira disminuye apreciablemente, véase la figura 1.4. El peso **P** no sólo origina desplazamientos en su propia dirección, en realidad provoca desplazamientos en las tres direcciones del espacio. Sin embargo, en el caso que nos ocupa, el requisito de rigidez sólo obliga a operar con el desplazamiento longitudinal.

La deformación unitaria tiene las dimensiones de una longitud en cada unidad de longitud y, por tanto, es adimensional. Si se quiere resaltar el hecho de que los alargamientos son en general mucho menores que las dimensiones de la estructura se pueden elegir distintas unidades de medida para cada longitud: la deformación se puede expresar entonces en milímetros en cada metro, por ejemplo. Si se usan las mismas unidades, los valores resultan normalmente muy pequeños y para evitar las incómodas potencias de 10 se suele dar en porcentaje o en tanto por mil. Una deformación de $2 \cdot 10^{-3}$ es igual que una de 0,2% o de 2 ‰ o de 2 mm/m.

§1.6 Ley tensión deformación

La deformación media ϵ correspondiente a cada tensión media σ soportada por el cable de la figura 1.2, definen una ley entre ambas que, como se ha visto, depende exclusivamente del material. Para obtener una representación gráfica de dicha ley basta, en la figura 1.2, con dividir las ordenadas por el área del cable ensayado y las abscisas por su longitud, véase la figura 1.5. La figura resultante es en todo semejante a la inicial, lo único que ha cambiado es la escala de la representación. Pero ahora la ley es, en principio, aplicable a cualquier otro cable de distinta geometría del ensayado pero de idéntico material.

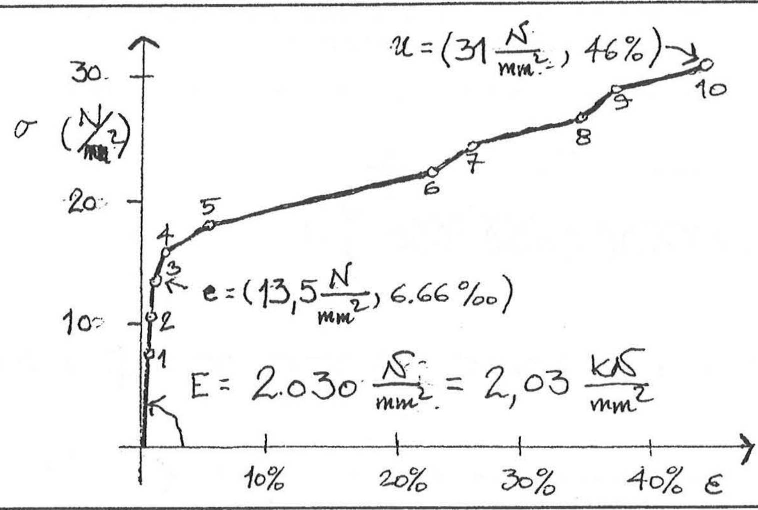


Figura 1.5: Diagrama tensión-deformación de la cinta anterior.

Igual que antes, para valores pequeños de la deformación, la gráfica es una recta y la ley tensión deformación se rige por una sencilla relación, conocida como *ley de Hooke*:

$$\sigma / \epsilon = \mathbf{E} \qquad [1.1]$$

siendo **E** la razón conocida como *modulo de Young* y que en adelante denominaremos *módulo de rigidez longitudinal*.[3] Las dimensiones del módulo de rigidez son las de una tensión: de hecho puede entenderse como la tensión necesaria para alargar el cable hasta el doble de su longitud inicial (y por tanto hasta una deformación unidad o del 100%), operación no siempre posible porque el material no suele soportar tales tensiones, rompiéndose antes. Incluso en materiales que admiten tales deformaciones sin romperse, la ley de Hooke no es siempre aplicable para derformaciones tan elevadas, que en realidad producen deformaciones y alargamientos mayores que los previstos por [1.1].

Como se ve en la figura 1.5, la ley de Hooke se cumple bastante fielmente hasta que no se supere cierto valor de la tensión (el punto 'e' en la figura). Durante ese período las tensiones son proporcionales a las deformaciones, la gráfica es una recta y su pendiente es precisamente el módulo de rigidez. Este período se suele denominar *período*

[3] También se la llama, por razones históricas, *módulo de elasticidad*, nombre equívoco que debe evitarse. En la voz *elástico* del DRAE se lee: "Dícese del cuerpo que puede recobrar más o menos completamente su figura y extensión luego que cese la acción de la causa que se las alteró". Como se deduce de [1.1], cuanto mayor es el módulo de Young, menores serán las deformaciones para un mismo valor de la tensión. Pero el módulo de Young nada nos dice acerca de si el material recobrará o no su figura al desaparecer la tensión.

lineal, *proporcional* e incluso *elástico*.[4] Al valor de la tensión a partir del que deja de cumplirse la ley de Hooke se le conoce como *límite de proporcionalidad* o *límite elástico* σ_e.[5] Entre el límite elástico y la *tensión de rotura* σ_u, un cierto incremento de tensión produce cada vez más deformación (un incremento de carga, cada vez más alargamiento): con grandes deformaciones, el material *se opone* menos a ser deformado, es menos rígido, también se dice que *cede más*. Por ello a este período se le conoce como *período de cedencia* y, por contraposición con el anterior, también como *período no-lineal* o *plástico*. Este período acaba al alcanzarse un cierto valor de deformación ϵ_u, instante en el que se produce la rotura física del cable en dos trozos (punto 'u' en la figura) y que, por ello, recibe el nombre de *deformación unitaria de rotura* o *deformación última*.

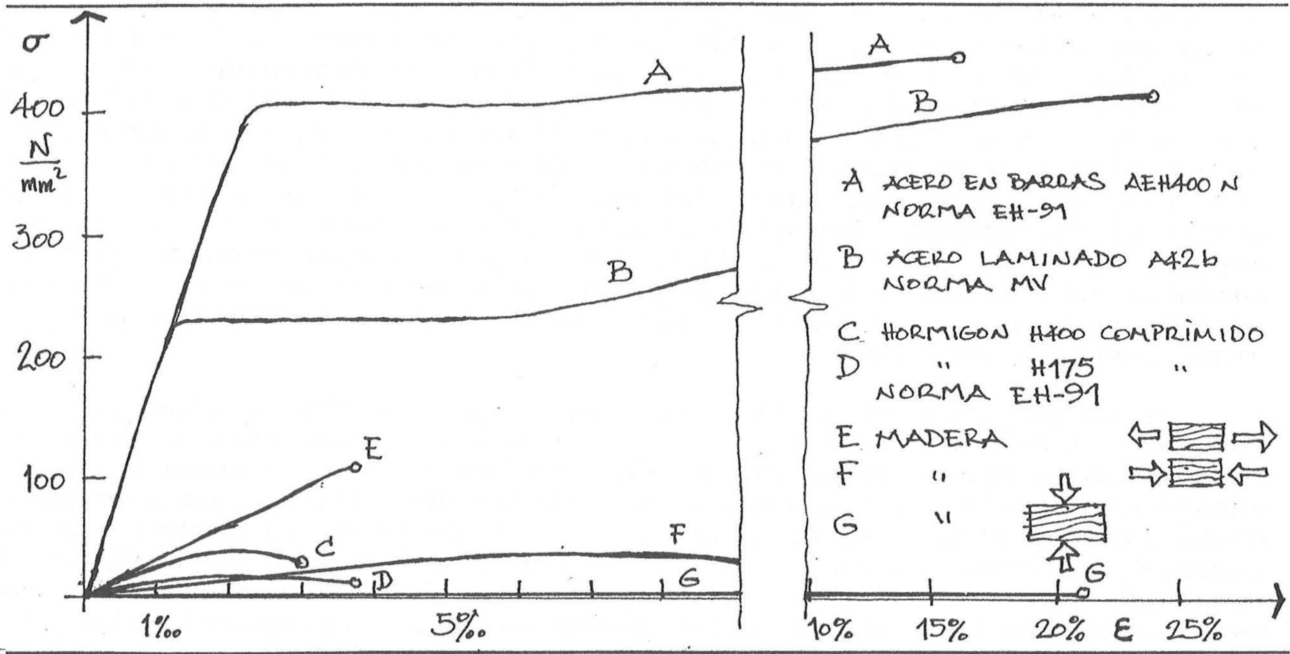


Figura 1.6: Ley tensión-deformación de diversos materiales.

Si se admite como bastante cierto que un material se comporta lo mismo independientemente de las dimensiones de la pieza en la que se usa, bastará ensayar una única pieza para establecer el diagrama de tensión-deformación del material.

Cada material presenta sus propias particularidades, véase figura 1.6. Con más o menos aproximación todos los diagramas se pueden esquematizar mediante dos rectas, véase figura 1.7: una de pendiente **E** que

---

[4] Denominación algo equívoca. Sin embargo, la razón ahora es distinta que en el caso del módulo de rigidez. En pura teoría un cuerpo sin período lineal puede ser elástico (y tener período elástico por tanto), aunque en la mayor parte de los materiales estructurales usados en edificación, durante el período lineal también existe *elasticidad* ("se recupera la figura"), de ahí que en este contexto "elástico" y "lineal" sean prácticamente sinónimos.

[5] Estrictamente hablando, el *límite de proporcionalidad* es el valor de la tensión a partir del cual el material deja de comportarse conforme a la ley de Hooke. Y el *límite elástico*, la tensión que de superarse provoca deformación permanente en la estructura, es decir, si se supera y luego la tensión desaparece, no "se recupera la figura". En el caso del acero son valores muy próximos, siendo el primero menor que el segundo y en la practica se usa uno cualquiera de ellos. De ahí que, para el resto de los materiales, se use coloquialmente ambas denominaciones.

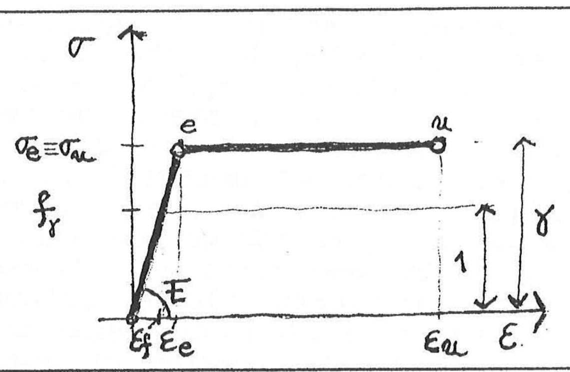


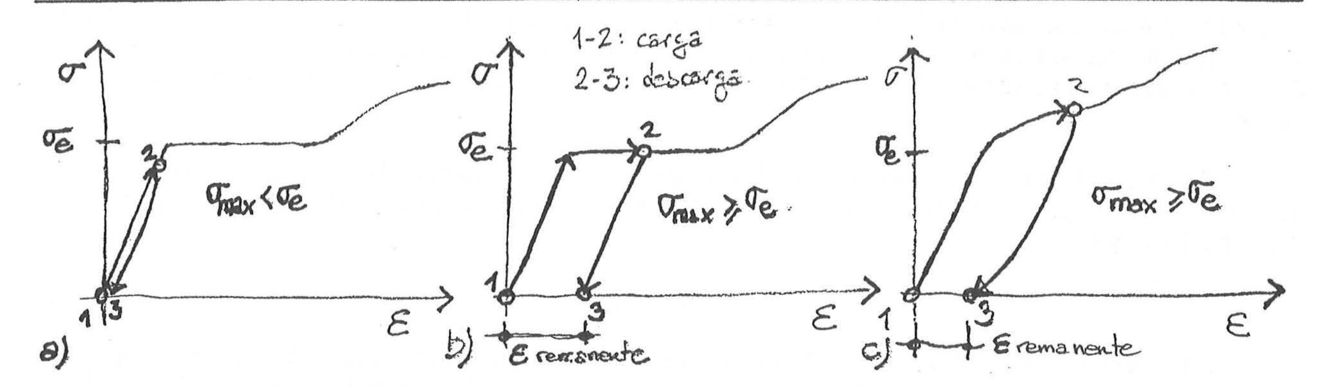
Figura 1.7: Ley tensión-deformación elastoplástica perfecta.

representa el período lineal que, en mayor o menor medida, existe en todos los materiales; y una horizontal que representa una *cedencia* o *relajación* con módulo de rigidez nulo (también denominada *recta de plasticidad perfecta*). En la medida en que la diferencia entre la deformación en el límite elástico ϵ_e y la de rotura ϵ_u sea pequeña, la rotura física se produce sin que se produzcan grandes deformaciones de la pieza, *sin avisar* diríamos (rotura *frágil*: como en la madera y la piedra traccionadas). Por el contrario, un período de cedencia grande permite apreciar la cercanía de la rotura por la aparición de grandes aumentos de deformación para pequeños incrementos de carga (rotura *dúctil*: caso del acero en tracción o de la madera comprimida perpendicularmente a su fibra).

Si se suspende el ensayo antes de llegar al límite elástico, se recupera la forma original: las tensiones y deformaciones disminuyen "siguiendo la misma senda" por donde aumentaron, véase figura 1.8a; el ensayo en principio puede repetirse cíclicamente. Pero si se sobrepasa dicho límite, aunque se suspenda el ensayo antes de la rotura, no se recobra la forma original: las tensiones y deformaciones disminuyen siguiendo una senda distinta de la que siguieron al aumentar (en muchos materiales, las tensiones y deformaciones disminuyen proporcionalmente, siguiendo una recta de pendiente **E**, paralela a la de carga), véase figura 1.8, b y c. El resultado es una cierta *deformación remanente* (con su correspondiente alargamiento). Si se repite el ensayo, las nuevas deformaciones se acumulan a las ya producidas, de modo que con tensiones sólo algo mayores que el límite elástico aplicadas varias veces, pueden producirse deformaciones enormes y si se supera la deformación última ϵ_u puede producirse la rotura. Este fenómeno se conoce como *fatiga* del material y es fácil encontrar evidencia experimental de él: si se dobla un alambre de metal lo suficiente como para deformarlo permanentemente, la primera vez no se rompe; pero si se desdobla y vuelve a doblar un número suficiente de veces acabará por partirse.[6]

Los requisitos de resistencia y rigidez exigibles en las estructuras de edificación obligan a que las tensiones del material bajo las acciones estén lejos de la rotura y del límite elástico. Por ello en general bastará con considerar el comportamiento de los materiales en el período lineal. En algún caso (el del acero y también el del hormi-

[6] De hecho, el fenómeno de la fatiga acontece incluso si la máxima tensión no supera el límite elástico. La diferencia es que, entonces, el proceso de carga debe repetirse no unas cuantas veces, sino miles o millones de veces: tnato más cuanto más pequeña sea la tensión máxima aplicada.



En **a** no se superó el límite elástico, mientras que en **b** y **c** sí. La forma de la *rama de descarga* (2-3) depende de la naturaleza del material, en **b** se representa la que suelen seguir materiales como el acero.

Figura 1.8: Ensayo de carga y descarga.

gón aunque en un sentido distinto), para aprovechar la ductilidad del material y, por tanto, toda su capacidad resistente, será necesario considerar la última parte del período de cedencia. En general no será necesario considerar con exactitud la forma en que se pasa de uno a otro período.

El comportamiento exacto de los materiales sólo es conocido con perfecta exactitud para unos pocos (acero, por ejemplo) y aun en estos casos para sólo algunas situaciones de carga especiales. El comportamiento de un material frente a un conjunto de cargas cualquiera es en general desconocido y es siempre necesario suponer un modelo de comportamiento. El modelo estándar de la figura 1.7 conduce a soluciones suficientemente aproximadas en los casos usuales en edificación.

§1.7 La solución del problema

Decidida la ley que ha de representar el comportamiento del material de la estructura de la figura 1.1, se puede ahora tanto dimensionar el cable como comprobarlo.

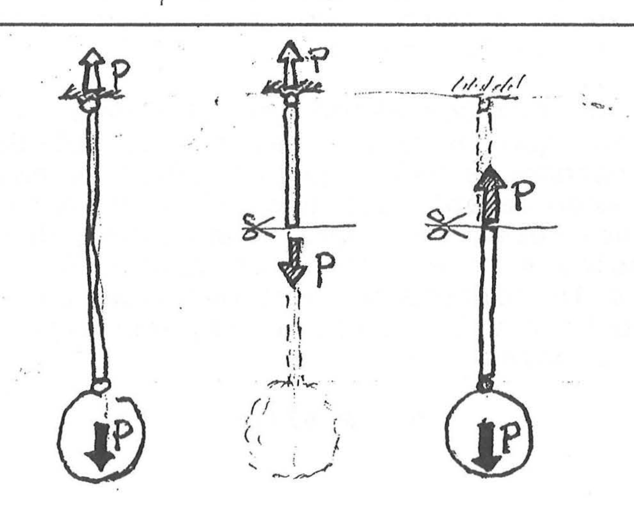


Figura 1.9: Equilibrio parcial de trozos obtenidos mediante cortes.

Si mediante un corte se aísla un trozo de cable, véase figura 1.9, el equilibrio estático del conjunto exige que la parte de cable *quitado*

ejerza sobre el otro una fuerza **N** igual al peso **P** de la lámpara. Dicha fuerza sólo se manifiesta cuando se realiza un corte, es una fuerza *interna* a la estructura y recibe el nombre de *solicitación*. Su valor, **P**, es independiente del corte que se considere (en este caso particular).

El requisito de seguridad exige que la carga de rotura sea mayor que el peso de la lámpara, tantas veces como indique el coeficiente de seguridad γ:

$$P_u \geq \gamma \cdot P \qquad [1.2]$$

La carga de rotura será de igual valor que la máxima tracción que pueda resistir el cable, $N_u = \sigma_u \cdot A$. Si se trata de dimensionar el cable, puede calcularse entonces el *área mínima necesaria por resistencia* A_N:

$$\sigma_u \cdot A \geq \gamma \cdot P \quad \therefore \quad A_N = \gamma \cdot P/\sigma_u \qquad [1.3]$$

Si hay que diseñar muchos cables para diversas lámparas, el único valor que varía de un caso a otro es **P**, el peso de la lámpara. El valor γ/σ_u, o su inverso σ_u/γ, se usa tanto en la práctica que merece la pena calcularlo una sola vez (para cada material corriente) y darle una denominación. σ_u/γ es una tensión que *incluye la seguridad exigida*; obviamente menor que la tensión de rotura y, con los coeficientes de seguridad habituales, también menor que el límite elástico: si bajo las acciones, en ningún punto de la estructura se supera ese valor, ésta cuenta con suficiente *reserva* de resistencia y es segura. Por ello se le denomina *tensión que el material resiste con seguridad* o, abreviadamente, *tensión segura* f_γ (denotado **f** a secas, cuando el grado de seguridad que se maneja es el habitual para el material).[7] La deformación correspondiente a f_γ se denomina *deformación segura* ϵ_f: la comprobación puede hacerse indistintamente con tensiones o deformaciones puesto que el material se encuentra en el período lineal y ambas son proporcionales entre sí.

Si se trata de comprobar la seguridad de un cable previamente definido, basta con calcular que el material soporta la tensión que produciría en el cable un peso aumentado γ veces, de valor $\gamma \cdot P/A$. Si $\gamma \cdot P/A \leq \sigma_u$ el cable es seguro. Como fórmula de comprobación también vale $P/A \leq \sigma_u/\gamma = f$ (más habitual).

El requisito de rigidez exige que el descenso experimentado por la lámpara sea menor que un cierto valor δ_{tol}, tolerable por el uso de la lámpara. Implícitamente exige que el cable se encuentre en período elástico, de otro modo la aplicación cíclica de la carga produciría por fatiga deformaciones permanentes que, acumuladas, crecerían sin límite. Por tanto, la tensión σ en el cable, de valor P/A, debe ser menor que σ_e. A la tensión σ le corresponde una deformación elástica ϵ igual a σ/E y un alargamiento total δ igual a $\epsilon \cdot h$, que expresado en función de las variables del problema es:

$$\delta = P \cdot h/(E \cdot A) \qquad [1.4]$$

---

[7] También se encuentra en la literatura bajo el nombre de *tensión admisible*, aunque la definición no es históricamente la misma. Por tensión admisible se entendió el valor σ_e/γ antes de que se considerarán las propiedades plásticas de los materiales. En un modelo elastoplástico perfecto el límite elástico coincide con la tensión de rotura y, por tanto, la tensión segura con la admisible.

Para que se cumpla el requisito de rigidez debe verificarse $\delta \le \delta_{tol}$, expresión que sirve para comprobar un cable previamente definido. La razón entre el peso **P** y el alargamiento δ que produce, se deduce de [1.4] y vale $\mathbf{E \cdot A/h}$, magnitud que denominaremos *rigidez del cable*, $\mathbf{k}_{P\delta}$. Según [1.4] cuanto mayor es la rigidez del cable, menor es el alargamiento a igualdad de carga. En general se entenderá por rigidez cualquier razón entre un término de fuerza —o tensión— y un término de desplazamiento —o deformación. De este modo, el módulo de Young **E** —la *rigidez del material*— puede denotarse como $\mathbf{k}_{\sigma\epsilon}$, puesto que es la razón entre tensiones normales y deformaciones longitudinales. La rigidez de una estructura se describe, en general, con tantos coeficientes de rigidez como pares de fuerza y desplazamiento puedan formarse, que en el ejemplo es sólo uno. La rigidez de una estructura depende en primier lugar de la de su material, pero también de su geometría (variables **A** y **h** en este caso).

Si se trata de dimensionar el cable, puede calcularse el *área mínima necesaria por rigidez* $\mathbf{A}_\delta$:

$$\mathbf{P \cdot h/(E \cdot A)} \le \delta_{tol} \quad \therefore \quad \mathbf{A}_\delta = \mathbf{P \cdot h/(E} \cdot \delta_{tol}) \qquad [1.5]$$

y puesto que ambos requisitos han de cumplirse simultáneamente el cable debe dimensionarse con un área **A** igual o mayor que $\max\{\mathbf{A}_N, \mathbf{A}_\delta\}$. En general, los dos requisitos no actúan simultáneamente: en unos casos la estructura se dimensionará *por resistencia* ($\mathbf{A}_N > \mathbf{A}_\delta$), en otros *por rigidez* ($\mathbf{A}_N < \mathbf{A}_\delta$).

§1.8 Equilibrio y energía

La ley tensión deformación divide el plano σ ϵ en dos partes, véase figura 1.10. Cualquiera trozo de dicho plano puede interpretarse como una *energía en cada unidad de volumen*. En efecto, en el diagrama **P** δ el área del rectángulo rayado vale $\mathbf{P} \cdot \delta$, es decir, el trabajo realizado por el peso al descender hasta la posición de equilibrio. En el diagrama σ ϵ ese área vale, recordando la definición de tensión y deformación, $(\mathbf{P} \cdot \delta)/(\mathbf{A \cdot h})$, ese mismo trabajo repartido en el volumen de la estructura. Medido de una u otra manera, dicho trabajo supone una disminución de la *energía potencial del peso* de la lámpara, $\Delta\mathbf{G}$.

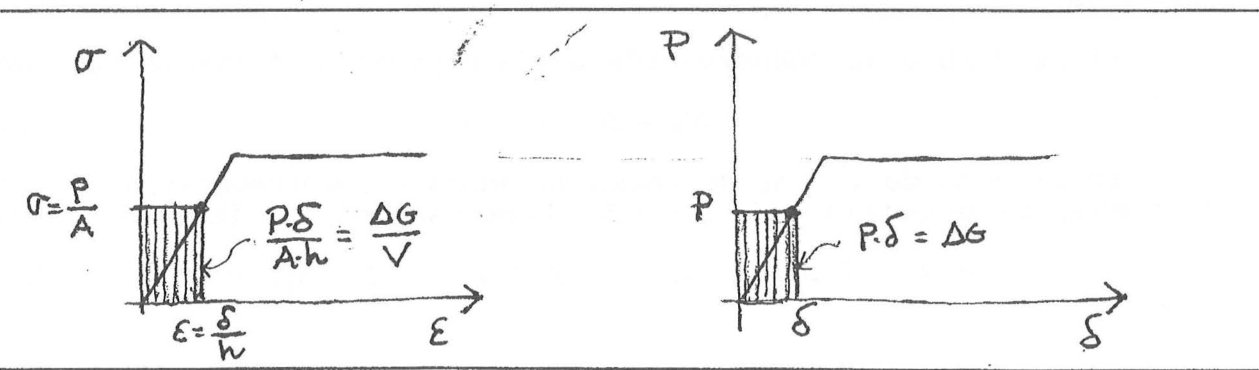
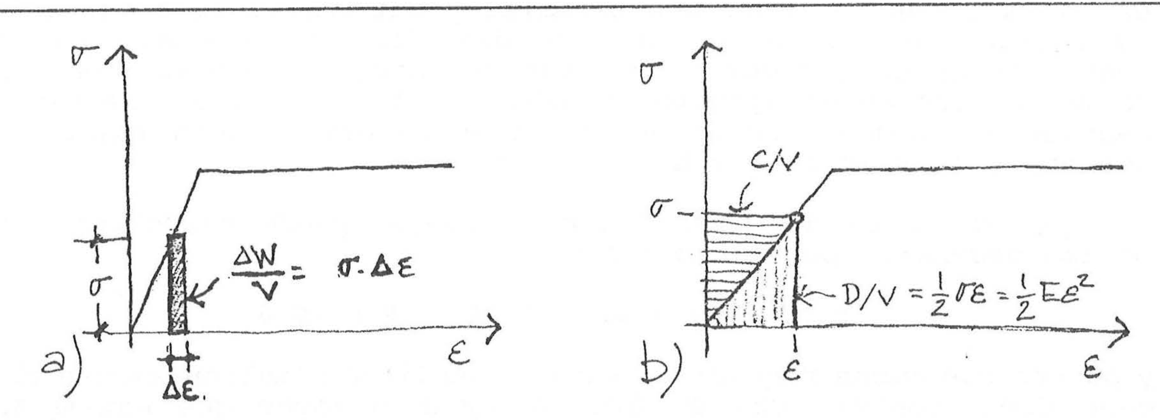


Figura 1.10: Diagramas σ ϵ y P δ. El rectángulo rayado representa la disminución de la energía potencial del peso.

El *principio de la conservación de la energía* postula que a esa disminución de energía le corresponderá un parejo aumento de energía en algún otro sitio del sistema que forman el peso y la estructura.

Desde el punto de vista del cable, cada nueva pesa que se le añade durante un ensayo provoca un cierto alargamiento y supone la realización de un trabajo para deformarlo, representado por el rectángulo rayado bajo la curva σ ϵ, véase figura 1.11a. Ese trabajo no se pierde: si se retiran las pesas el cable vuelve a su posición inicial con *energía*, que podría emplearse para algún propósito útil con dispositivos adecuados. El *trabajo de deformación* se acumula en el cable como *energía de deformación*, otra forma de energía también potencial, pues depende de la posición.



En **a** se representa el incremento de la energía de deformación para un incremento de la deformación. En **b** figuran el incremento total de la energía de deformación y la energía disipada.

Figura 1.11: Diagrama σ ϵ.

La cantidad total de energía de deformación **D** acumulada hasta alcanzar la posición de equilibrio viene representada por el área rayada *bajo* la curva σ ϵ, véase figura 1.11b. El triángulo rayado por encima de la curva σ ϵ, es la energía que falta para completar el balance, e históricamente ha recibido el nombre de *energía complementaria* **C**; se trata de *energía disipada* en forma de calor, sonido o de cualquier otro modo, disipación debida a la inevitable existencia de rozamiento entre las partes de la estructura durante el movimiento ocasionado por la puesta en carga. Esta disipación es la causa de que, en general, la puesta en carga de una estructura sea un proceso *termodinámicamente irreversible* en el que se disipa energía (se pierde energía potencial o útil), lo que igualmente ocurre en el proceso de descarga.

El principio de conservación puede expresarse formalmente como:

$$\Delta \mathbf{G} + \mathbf{D} + \mathbf{C} = 0 \qquad [1.6]$$

En el caso de la ley de Hooke la energía complementaria es igual a la energía de deformación y puede obtenerse el valor de esta última:[8]

$$\because\ -\mathbf{P}\cdot\delta + 2\cdot\mathbf{D} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}\cdot\delta/2 \quad \therefore \quad \mathbf{D} = \mathbf{k}_{P\delta}\cdot\delta^2/2 \qquad [1.7]$$

[8] La ley tensión deformación implica una cierta expresión para la energía de deformación y, a la inversa, la expresión que define el valor de la energía de deformación implica una cierta ley tensión deformación. Se trata de dos maneras alternativas y equivalentes de definir el comportamiento de los materiales. La expresión de la energía se suele encontrar en la literatura bajo la denominación *ecuación constitutiva del material*, derivada de una traducción literal del inglés.

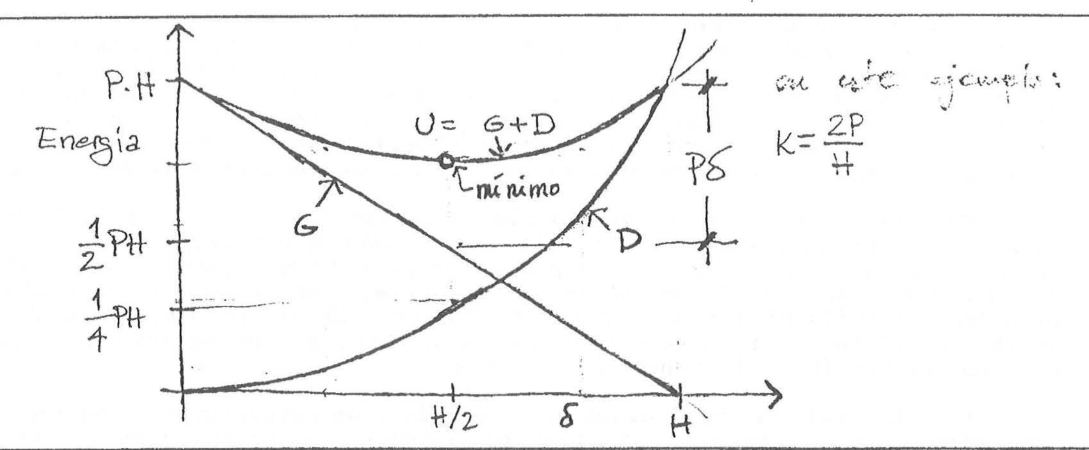


Figura 1.12: Variación de la energía con el descenso.

Para medir la energía se ha adoptado el nivel del suelo situado una altura **H** por debajo de la posición inicial de la lámpara, de modo que antes de soltarla, $\delta = 0$, la energía potencial es **P·H**. Para cualquier otra posición inferior, la energía potencial gravitatoria disminuye linealmente mientras que la de deformación de la estructura crece cuadráticamente. La posición de equilibrio corresponde al mínimo de la suma de ambas energías potenciales, del peso y de deformación de la estructura.

Conforme aumenta el descenso del peso, su energía potencial disminuye mientras que aumenta la energía potencial de deformación, véase figura 1.12. La energía potencial total, **U**, suma de ambas es mínima en la posición de equilibrio, principio que se conoce como *de la mínima energía potencial* (y que corresponde a la máxima energía disipada). Si no existiera la estructura, los pesos tenderían a su posición de mínima energía potencial, el suelo. Pero mientras la estructura sea capaz de almacenar energía, parte de la potencial perdida por los pesos se almacena como energía de deformación. El sistema conjunto, considerado globalmente, alcanza el equilibrio en una posición que representa un *compromiso* entre las situaciones estables (o de mínima energía) de los pesos (el suelo) y la estructura (su posición inicial). Los pesos no pueden alcanzar el suelo pero descienden algo; la estructura no puede permanecer indeformable, pero se deforma lo menos posible. En la posición de equilibrio ola energía potencial total, **U**, es mínima, lo que significa que pequeñas variaciones diferenciales alrededor de la posición de equilibrio no alteran su valor, es decir, su variación en la posición de equilibrio es nula. Este principio *de la mínima energía potencial* puede expresar sintéticamente y con generalidad el equilibrio estático y en ocasiones puede usarse con ventaja para el análisis de estructuras.

NOTAS HISTÓRICAS Y BIBLIOGRÁFICAS

Los primeros experimentos para determinar las propiedades mecánicas de los materiales fueron llevados a cabo por Leonardo, quien tuvo el mérito de llamar la atención tanto sobre la carga soportada como sobre los cambios de forma. Pero fue Robert Hooke (1678) quien propuso y verificó la proporcionalidad entre carga y alargamiento. Sin embargo, la que hoy se conoce como ley de Hooke fue establecida con posterioridad a definir con precisión los conceptos de tensión —debido a Coulomb (1773)— y de deformación. Este último fue definitivamente aclarado por Thomas Young (1807), quién de todas formas no definió tampoco lo que hoy conocemos como *su módulo*. El módulo al que se refirió Young era una *extraña magnitud* de la que definía su *peso* (**E·A**, lo que hoy denominados *rigidez de la sección* $k_{P\epsilon}$, por ser la razón entre el peso y la deformación de la sección) y su *altura* (la razón entre **E** y el peso específico del material en cuestión). Hubo que esperar a que Cauchy (1822), reformulando diversos escritos de Navier y Saint Venant, expresara todo ello tal y como hoy lo conocemos.

Los *experimentos mentales* utilizados en **§1.4** y **§1.5** aprovechan ideas y razonamientos expuestos por Galileo en sus *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue scienze* (1638). Tales experimentos, que sólo dependen de su propia lógica, no permiten asegurar que lo formulado sea una representación exacta de la realidad, pero al menos conducen a una formulación coherente consigo misma. Esta forma de operar es típica del Renacimiento y representa la superación definitiva de los prejuicios escolásticos y de la doctrina equivocada de Aristóteles en lo que refiere a la mecánica.

Como en tantas otras cosas, la lógica interna es necesaria pero no suficiente: con la invención del ferrocarril se tuvo la oportunidad de emplear la Resistencia de Materiales para la resolución de problemas prácticos y, al mismo tiempo, comprobar lo inadecuado de muchas de las soluciones entonces calculadas. Se descubrió la fatiga, el período plástico, la influencia de cargas dinámicas, etc. En el siglo XIX y en el contexto de la industria del ferrocarril se consideraba una tensión como admisible o segura cuando no superaba el tercio de la tensión de rotura.

La diferencia entre el *diseño* y el *análisis* de estructuras es de importancia básica para situar en un contexto adecuado el proyecto de estructuras en arquitectura. He realizado una discusión detallada del asunto en otro lugar ("Sobre la enseñanza y la práctica de la teoría de estructuras", *Informes de la construcción*, número de mayo/junio de 1997), en dónde el lector encontrará referencias adicionales.

El análisis de una estructura se fundamenta en el hecho de que la estructura o cualquiera de sus partes se encuentra en equilibrio estático. Las ecuaciones de equilibrio son, por tanto, la herramienta fundamental para efectuar el análisis.

El equilibrio estático puede representarse mediante una multitud de formas distintas. Todas ellas conducen, naturalmente, a los mismos resultados, pero su aplicación resulta más fácil o más difícil según el problema planteado. Elegir la forma de las ecuaciones más adecuada a un problema, reduce y simplifica el número de operaciones para obtener la solución. Desafortunadamente no es posible dar reglas simples para elegir, reglas que sólo pueden ser aprendidas mediante la utilización práctica de las ecuaciones en un gran número de casos.

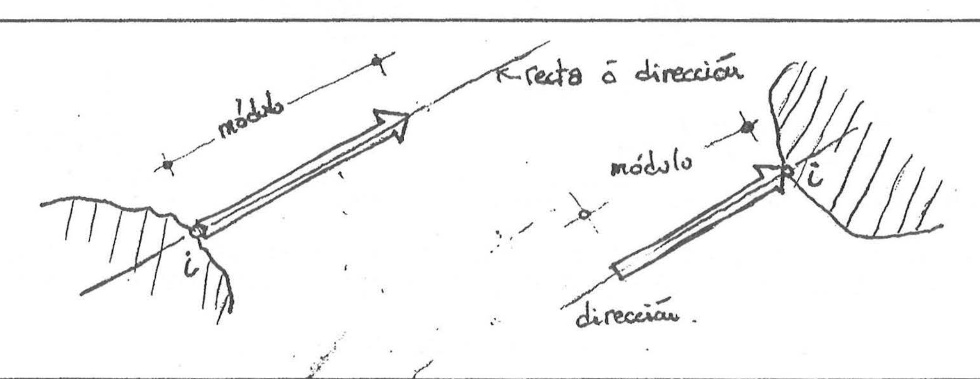


Figura 2.1: Fuerza considera como vector.

§2.1 Ecuaciones de equilibrio con fuerzas

La forma más moderna de expresar el equilibrio estático es la vectorial. Puede representarse una fuerza mediante un vector fijo[9] en el plano o en el espacio, ver figura 2.1, definiendo su *punto de aplicación* **i**, su *dirección* o recta sobre la que apoya, el *sentido* en que recorre, o apunta dentro de, dicha recta, y su *intensidad* o *módulo* **F**.

[9] En ocasiones basta con utilizar vectores deslizantes sin punto de aplicación definido. El uso de vectores fijos es más general.

Una única fuerza constante aplicada sobre un cuerpo lo pone en movimiento, movimiento que puede consistir en una traslación, una rotación o en ambas cosas a un tiempo, con aceleraciones constantes en todos los casos. Que haya o no rotación depende de que la dirección de la fuerza pase por el centro de gravedad del cuerpo. En la Tierra, todos los cuerpos se hallan sometidos a su propio peso aplicado en su centro de gravedad y con dirección, sentido e intensidad definidas. En ausencia de otras fuerzas, el cuerpo caerá hacia la Tierra en un movimiento de traslación uniformemente acelerado.

Si se imagina un cuerpo libre de campos gravitatorios sobre el que se aplica una única fuerza arbitraria, sólo experimentará rotación si la fuerza *no pasa* por su centro de gravedad. Para cuantificar esa propiedad de la fuerza se define su *momento* respecto al centro de gravedad. En general, se define el *momento de una fuerza respecto a un punto cualquiera*, como el producto vectorial[10] del vector *distancia* (que va del punto elegido al punto de aplicación de la fuerza) por el vector fuerza:

$$\{\mathbf{M}_{Ai}\} = \{\mathbf{d}_{Ai}\} \times \{\mathbf{F}_i\}$$

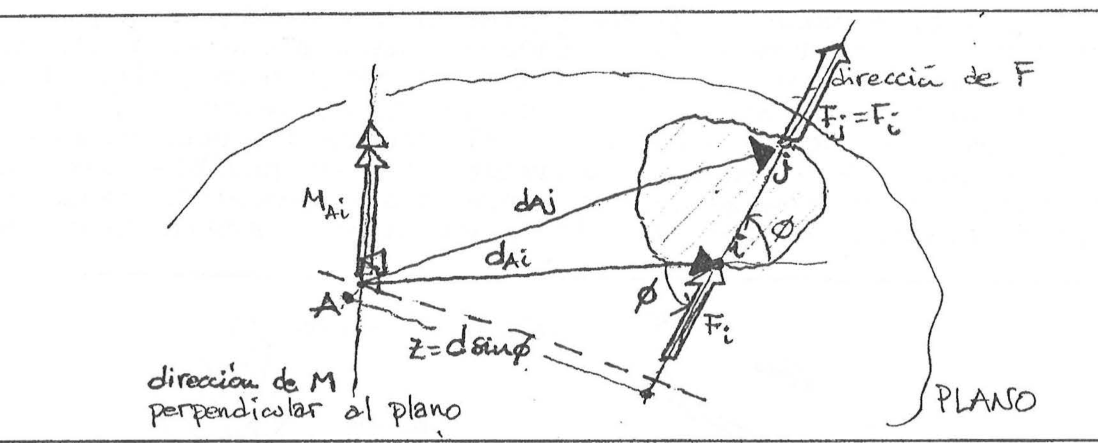


Figura 2.2: Momento de una fuerza respecto a un punto.

El módulo o intensidad del momento (que es un nuevo vector perpendicular al plano definido por **F** y **d**, y que pasa por A), vale:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}\cdot\sin(\phi)$$

Si la fuerza pasa por el punto elegido, el vector distancia es nulo y también lo es el momento. Cualquier otro vector con la misma dirección e intensidad que **F** produce, respecto al punto A, el mismo momento (salvo un signo que depende de si el sentido de ambos coincide), que resulta ser independiente del punto de aplicación de la fuerza. Si **F** se "aleja" aumenta **d** pero tanto como disminuye $\sin(\phi)$, de modo que la cantidad $\mathbf{d}\cdot\sin(\phi)$ permanece constante, cantidad que es común a todas las fuerzas de igual módulo que se apoyan en esa dirección y que recibe el nombre de *brazo de palanca respecto al punto A*, **z**. La intensidad del momento es, entonces:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{z} \qquad [2.1]$$

---

10 Recuérdese que el producto vectorial de dos vectores, $\{\mathbf{a}\}\times\{\mathbf{b}\}$, es otro vector $\{\mathbf{c}\}$ de módulo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\sin(\beta)$, siendo β el ángulo que forman entre sí y cuya dirección es perpendicular al plano que definen las direcciones de ambos.

expresión de enorme utilidad e importancia práctica como se verá. El brazo de palanca es simplemente la distancia desde A a la recta que define la dirección de **F**, véase figura 2.2.

Para que el cuerpo en cuestión recupere el equilibrio será imprescindible aplicar una fuerza en todo igual a la anterior pero de sentido contrario. Si no es posible aplicar dicha fuerza en la misma dirección, pero sí en una dirección paralela, se anulará el movimiento de traslación pero no el de rotación.

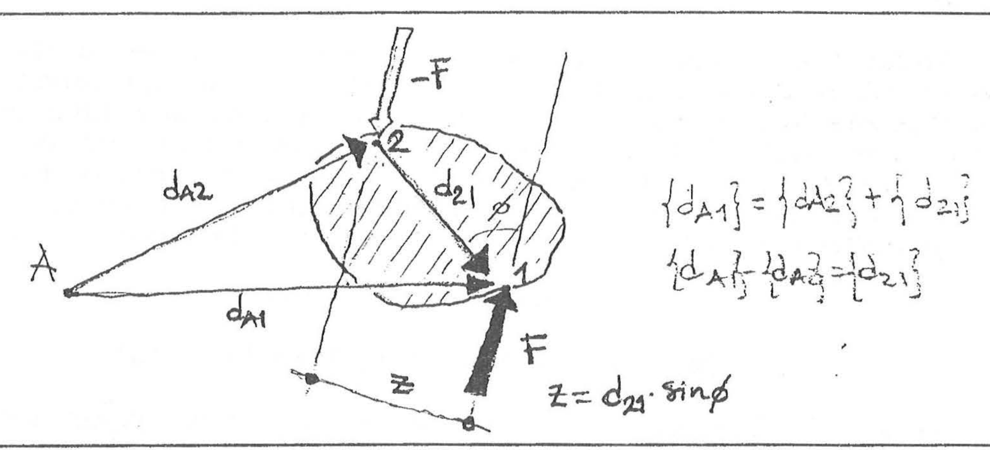


Figura 2.3: Par de fuerzas.

Puesto que las fuerzas son de sentido contrario, el momento respecto a un punto cualquiera del *par de fuerzas* será:

$$\{\mathbf{d}_{A1}\}\times\{\mathbf{F}_1\} + \{\mathbf{d}_{A2}\}\times\{-\mathbf{F}_1\} = (\{\mathbf{d}_{A1}\}-\{\mathbf{d}_{A2}\})\times\{\mathbf{F}_1\} = \{\mathbf{d}_{21}\}\times\{\mathbf{F}_1\}$$

y, por tanto, igual al producido por una cualquiera de ellas respecto al punto de aplicación de la otra. Denominando *brazo de palanca del par* **z** a la distancia entre las fuerzas (medida perpendicularmente a sus direcciones), obtenemos una expresión formalmente idéntica a la [2.1], válida ahora para cualquier punto del espacio. Una única fuerza da más momento respecto a puntos más alejados, mientras que un par de fuerzas de sentido contrario da un momento constante. Una única fuerza produce traslaciones y/o rotaciones, mientras que un par sólo rotaciones.

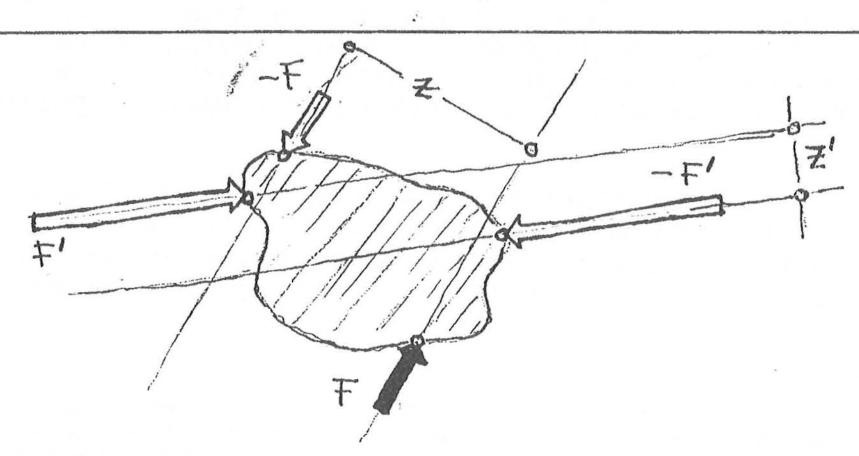


Figura 2.4: Fuerzas necesarias para equilibrar a otra.

Para anular la rotación del par será necesario aplicar al menos otro par, formado por otras dos fuerzas opuestas entre sí, y con tal

brazo de palanca que produzcan un momento de igual magnitud y dirección —para ello el nuevo par debe estar en el mismo plano que el anterior—, pero de sentido contrario al de las fuerzas **F**:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{F}'\cdot\mathbf{z}'$$

Si las $\mathbf{F}'$ son menores que las **F**, deberán actuar con mayor brazo ($\mathbf{z}'=(\mathbf{F}/\mathbf{F}')\cdot\mathbf{z}$); con menor si son mayores. En definitiva, el momento es el resultado de dos margitudes, fuerza y brazo, que pueden intercambiarse.

Estas cuatro fuerzas no mueven el cuerpo porque no producen ningún momento ni ninguna fuerza neta. En general, considerando un conjunto de **n** fuerzas aplicadas sobre el cuerpo, se dice que está en equilibrio si la suma vectorial de todas las fuerzas (suma que se conoce como *resultante del conjunto*) es nula y si la suma vectorial de los momentos de todas las fuerzas respecto a un punto arbitrario (*momento resultante del conjunto respecto al punto en cuestión*) también lo es:

$$\{\mathbf{F}_R\} = \Sigma\{\mathbf{F}_i\} = \{0\}$$
$$\{\mathbf{M}_{AR}\} = \Sigma\{\mathbf{M}_{Ai}\} = \Sigma(\{\mathbf{d}_{Ai}\}\times\{\mathbf{F}_i\}) = \{0\} \qquad [2.2]$$

Si se cumplen ambas ecuaciones el cuerpo no experimentará ningún movimiento.[11] El carácter vectorial de estas expresiones les da generalidad: valen tanto para el plano como para el espacio. Además las ecuaciones anteriores no son las únicas posibles, basta con calcular los momentos respecto a otro punto B para obtener una nueva segunda ecuación que, junto a la primera, son condiciones igualmente necesarias y suficientes para el equilibrio. Puesto que hay infinitos puntos, las [2.2] pueden escribirse de infinitas maneras, aunque siempre se trata del mismo sistema de ecuaciones.[12]

Para aplicar la primera, sólo hay que dibujar las fuerzas, una a continuación de otra. Si la figura resultante, conocida como *polígono vectorial de fuerzas*, es cerrada la resultante es nula. Para aplicar la segunda hay que obtener primero los vectores que representan los momentos. Su dirección y sentido se podrían obtener gráficamente (en una perspectiva) y su módulo mediante la aplicación de [2.1]. Ahora solo hay que dibujar estos vectores una tras otro. De nuevo, si la figura resultante, lo que podría llamarse *polígono vectorial de momentos*, es cerrada el momento resultante es nulo. Como se puede imaginar, el conjunto de operaciones para trazar este segundo polígono es bastante más engorroso.

La primera transformación para su uso práctico surgió a finales del siglo XVII y es aplicable a conjuntos de fuerzas planos. Se trata de sustituir el polígono vectorial de momentos por una figura construida a partir de las fuerzas, el *polígono funicular*, que permite

[11] No habrá traslación puesto que la resultante es nula según la primera ecuación. En tal caso, además, el sistema como mucho es un par de fuerzas opuestas. Puesto que un par da el mismo momento respecto a cualquier punto, basta demostrar que ese momento es nulo para un punto arbitrario, por ejemplo el A (segunda ecuación). El sistema es, por tanto, idéntico a una fuerza nula y no hay movimiento.

[12] Puede demostrarse que la primera ecuación puede sustituirse por una ecuación de momentos respecto a otro punto B, con la única condición que la recta AB no coincida con la dirección de la resultante.

obtener el momento resultante a partir de las fuerzas y de su posición en el plano, y que resulta ser una figura cerrada si es nulo. Su importancia conceptual es grande, pues de ella derivan muchos conceptos fundamentales, pero su estudio excede el alcance de este texto.

En muchos casos, el uso de la forma gráfica de las [2.2] era imprescindible hasta la aparición de las calculadoras electrónicas. Desde entonces, se tiende a sustituirlas por su forma analítica, aun cuando su uso práctico hoy en día resulta recomendable si se posee cierta habilidad para dibujar.

La forma analítica mas usada es la *cartesiana*. Para ello naturalmente hay que definir un sistema de ejes mediante vectores unitarios o *versores ortogonales* $\{\mathbf{i}\}$, $\{\mathbf{j}\}$ y $\{\mathbf{k}\}$. Cada vector, ya se trate de fuerzas, distancias o momentos, se expresa ahora en función de sus componentes cartesianas:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{F}_i\} &= \mathbf{X}_i\cdot\{\mathbf{i}\} + \mathbf{Y}_i\cdot\{\mathbf{j}\} + \mathbf{Z}_i\cdot\{\mathbf{k}\}\\ \{\mathbf{d}_{Ai}\} &= \mathbf{a}_{Ai}\cdot\{\mathbf{i}\} + \mathbf{b}_{Ai}\cdot\{\mathbf{j}\} + \mathbf{c}_{Ai}\cdot\{\mathbf{k}\}\\ \{\mathbf{M}_{Ai}\} &= \mathbf{U}_{Ai}\cdot\{\mathbf{i}\} + \mathbf{V}_{Ai}\cdot\{\mathbf{j}\} + \mathbf{W}_{Ai}\cdot\{\mathbf{k}\}\end{aligned}$$

que se obtienen mediante el producto escalar del vector por el versor que corresponda.[13] Las componentes del momento pueden obtenerse directamente de la expresión cartesiana del producto vectorial:

$$\{\mathbf{M}_{Ai}\} = \{\mathbf{d}_{Ai}\}\times\{\mathbf{F}_i\} = \begin{vmatrix}\{\mathbf{i}\} & \{\mathbf{j}\} & \{\mathbf{k}\}\\ \mathbf{a}_{Ai} & \mathbf{b}_{Ai} & \mathbf{c}_{Ai}\\ \mathbf{X}_i & \mathbf{Y}_i & \mathbf{Z}_i\end{vmatrix}$$

en el que el último miembro debe interpretarse como un determinante.

Las componentes de la fuerza y del momento resultante son la suma escalar de las componentes de todas las fuerzas y de sus momentos respecto a un punto. Y deben ser nulas para que ambos vectores lo sean, de ahí surgen seis ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_R &= \Sigma\mathbf{X}_i = 0\\ \mathbf{Y}_R &= \Sigma\mathbf{Y}_i = 0\\ \mathbf{Z}_R &= \Sigma\mathbf{Z}_i = 0\\ \mathbf{U}_{AR} &= -\Sigma\mathbf{Y}_i\cdot\mathbf{c}_{Ai} + \Sigma\mathbf{Z}_i\cdot\mathbf{b}_{Ai} = 0\\ \mathbf{V}_{AR} &= -\Sigma\mathbf{Z}_i\cdot\mathbf{a}_{Ai} + \Sigma\mathbf{X}_i\cdot\mathbf{c}_{Ai} = 0\\ \mathbf{W}_{AR} &= -\Sigma\mathbf{X}_i\cdot\mathbf{b}_{Ai} + \Sigma\mathbf{Y}_i\cdot\mathbf{a}_{Ai} = 0\end{aligned} \qquad [2.3]$$

Las tres primeras pueden interpretarse como suma de componentes de fuerza según la dirección de cada eje cartesiano. Cada una de ellas representa la condición de que no exista movimiento de traslación en esa dirección.

Análogamente, las tres últimas son suma de componentes de momento en la dirección de cada eje, o *momentos respecto al eje*, y representan la condición de que ninguno de los ejes lo sea de un movimiento de rotación en el plano perpendicular. Cada una de ellas puede escribirse

---

13. Recuérdese que el producto escalar de dos vectores $\{\mathbf{a}\}\cdot\{\mathbf{b}\}$ vale $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\cos(\alpha)$, siendo α el ángulo que forman ambos. Si $\{\mathbf{b}\}$ es un versor entonces, $\mathbf{b}$ es igual a 1, y el producto es simplemente $\mathbf{a}\cdot\cos(\alpha)$, es decir, el módulo de la proyección de $\mathbf{a}$ sobre la dirección de $\mathbf{b}$.

respecto de puntos distintos a las de las demás, en virtud de la arbitrariedad con que puede elegirse el punto de referencia.[14]

Si el conjunto de fuerzas esta contenido en un plano (considérese el **xy** por comodidad), las [2.3] se reducen a tres:

$$\mathbf{X}_R = \Sigma \mathbf{X}_i = 0$$
$$\mathbf{Y}_R = \Sigma \mathbf{Y}_i = 0 \qquad [2.4]$$
$$\mathbf{W}_{AR} = -\Sigma \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{b}_{Ai} + \Sigma \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{a}_{Ai} = 0$$

Las [2.3] o las [2.4] no son sino las [2.2] cambiadas de formato: se trata siempre del mismo único sistema de ecuaciones visto desde diferentes puntos de vista.

§2.2 Equilibrio global, acciones y reacciones

En el análisis de estructuras las fuerzas involucradas son conocidos inicialmente de un modo incompleto: se conocen las acciones (que en general no forman un conjunto en equilibrio) y los vínculos, puntos en los que la estructura se une a otro cuerpo (generalmente el suelo) y que no pueden desplazarse respecto a este último. Es decir, los desplazamientos de la estructura se miden en relación a los vínculos que consideramos fijos. Considerando el equilibrio de toda la estructura o *equilibrio global* pueden calcularse las fuerzas necesarias para equilibrar las acciones, conocidas como *reacciones*, fuerzas que sólo pueden aparecer en los vínculos, puesto que las reacciones no son sino las fuerzas que ejerce sobre ella a través de los vínculos el cuerpo sobre el que la estructura se apoya, para mantenerla quieta. Acciones y reacciones forman un conjunto en equilibrio considerado globalmente.

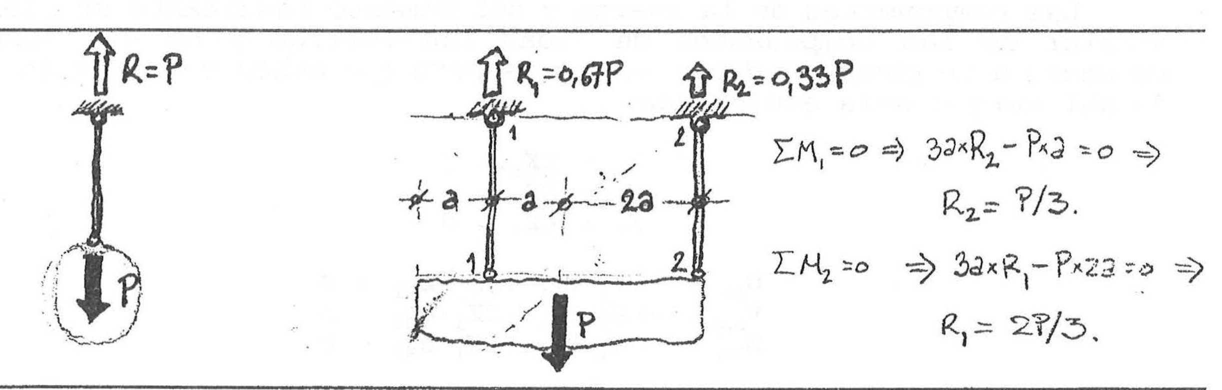


Figura 2.5: Acciones y reacciones.

Un modo de proceder, en general cómodo, consiste en calcular mediante las ecuaciones de equilibrio la *resultante de las acciones*, que en general no será nula. La *resultante de las reacciones* debe ser naturalmente en todo igual salvo en el sentido, que debe ser contrario. El cálculo de las reacciones consiste en descomponer esa resultante en fuerzas aplicadas en los vínculos. Para calcularlas se emplean de nuevo ecuaciones de equilibrio. Naturalmente, no pueden usarse más de seis ecuaciones (tres en el plano) y deben evitarse las ecuaciones de momentos que conduzcan a ecuaciones idénticamente nulas.

[14] Y al igual que ocurría con la forma vectorial, las tres primeras pueden sustituirse por ecuaciones de momento.

Para un conjunto de fuerzas plano, la sustentación de la estructura debe impedir al menos tres movimientos y, por tanto, proporcionar tres reacciones independientes: de lo contrario será imposible satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio. Existe por tanto una sustentación *mínima* que asegura el equilibrio estático global formada por *tres vínculos* que impidan tres movimientos independientes. (El razonamiento en el espacio es análogo y la sustentación mínima requiere seis vínculos independientes.) Ahora bien, si la sustentación impide más de tres movimientos, habrá más de tres reacciones desconocidas y, en general, las tres ecuaciones cartesianas de equilibrio serán insuficientes para determinar todas las reacciones. A lo más, el simple equilibrio estático global puede determinar infinitos conjuntos de reacciones capaces de equilibrar la resultante de las acciones (o comprobar si un conjunto dado de reacciones lo hace). Para determinar cual de ellos equilibra una estructura particular será necesario un análisis más detallado del sistema estructural. La sustentación con tres vínculos independientes (seis en el espacio) cuyas tres reacciones pueden determinarse por simple equilibrio se denomina *isostática*. Con más vínculos independientes se denomina *hiperestática*.

§2.3 Equilibrio parcial, solicitación

El equilibrio de la estructura exige no sólo el equilibrio global entre acciones y reacciones, sino también el *equilibrio de cualquier parte, trozo o miembro considerado aisladamente*, puesto que el equilibrio estático afecta a toda ella.

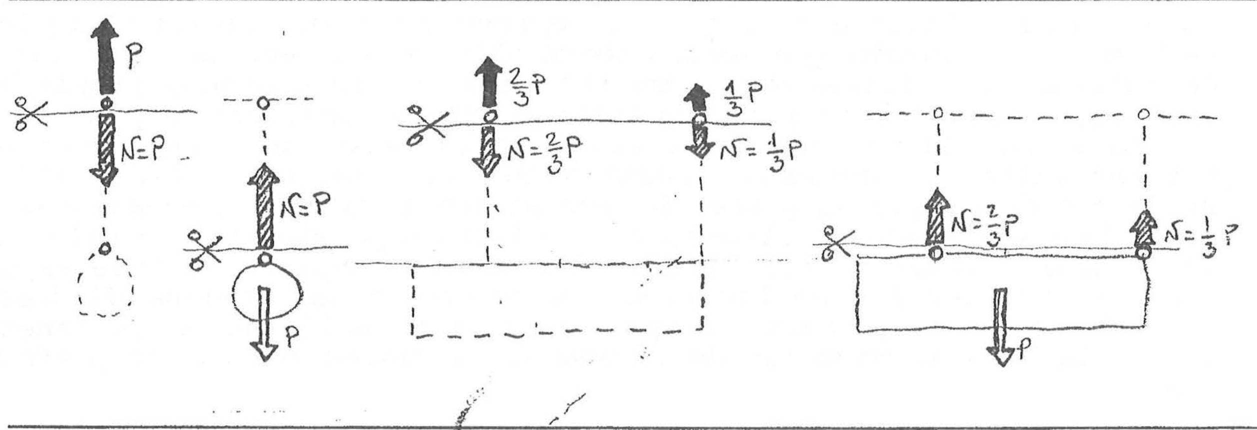


Figura 2.6: Equilibrio parcial y solicitaciones en cortes.

Si se aísla un trozo de la estructura mediante un *corte imaginario*, sólo una parte de las acciones y reacciones actuarán sobre ese trozo y, en general, no formarán un conjunto en equilibrio. Aplicando las ecuaciones de equilibrio al trozo aislado pueden calcularse las fuerzas necesarias para equilibrar el conjunto de acciones y reacciones actuantes.[15] Estas fuerzas sólo pueden existir en la superficie del corte, es decir, son fuerzas aplicadas en el interior de la estructura. Por ello, a acciones y reacciones se las denomina *fuerzas exteriores* por contraposición a las *fuerzas interiores* también denominadas *solicitaciones* o *esfuerzos*.

---

[15] Para que el cálculo sea posible de manera directa la sustentación debe ser isostática.

Las solicitaciones representan lo que el trozo de estructura suprimido por el corte *ejerce* sobre el trozo cuyo equilibrio se considera. En cierto sentido, es como si se pudiera sustituir trozos de estructura por las fuerzas (solicitaciones) que ese trozo ejerce sobre el resto.

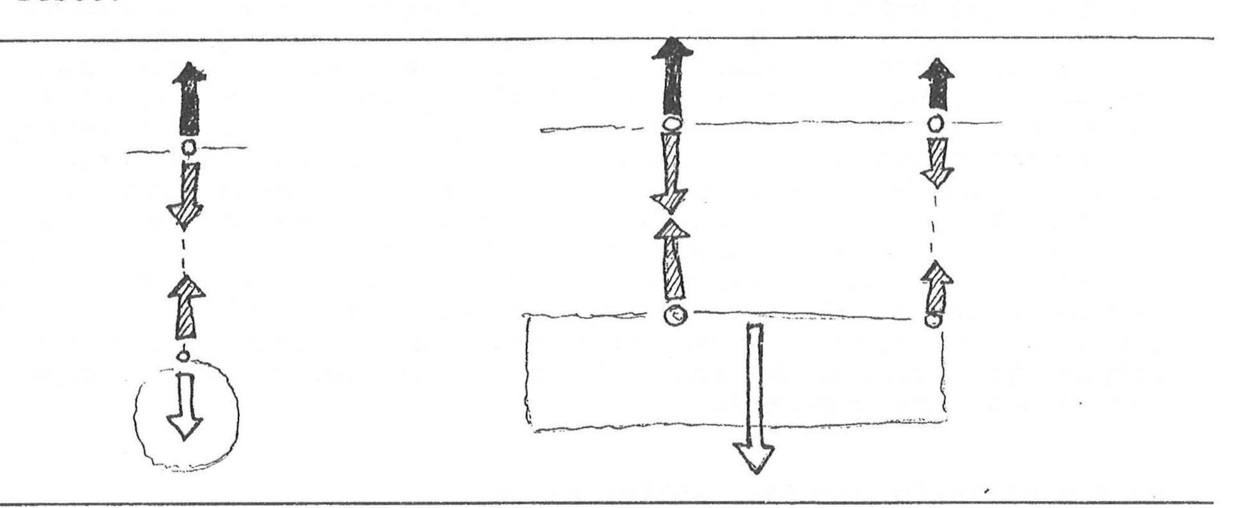


Figura 2.7: Conjunto completo de fuerzas.

Esta sustitución puede hacerse sistemáticamente. Cada trozo de estructura entre dos cortes sucesivos puede sustituirse por las solicitaciones calculadas en dichos cortes. Si los trozos se escogen de modo que ninguna de las acciones ni de las reacciones sea eliminada, la estructura *acaba desapareciendo*, quedando sustituida por el conjunto completo de solicitaciones que la *representan* y el conjunto completo de fuerzas exteriores que actúan sobre ella. Se obtiene así un conjunto de fuerzas, que llamaremos *completo*, con una interesante propiedad: cualquier parte del conjunto de fuerzas que se considere esta en equilibrio y, por tanto, cualquier trozo de la estructura (representando por una parte del conjunto) también lo está, que es precisamente la evidencia de la que se parte. El uso sistemático de las ecuaciones de equilibrio en trozos inteligentemente elegidos permite determinar todas las solicitaciones y, por tanto, el conjunto completo de fuerzas actuantes. La elección de los trozos a sustituir se denomina *discretización*[16] de la estructura. Aunque la discretización no es en general única, las líneas maestras de la geometría suelen indicar la preferible.

§2.4 Estructuras isostáticas e hiperestáticas

Hasta aquí las ecuaciones de equilibrio con fuerzas han sido más que suficientes para resolver los problemas de análisis planteados (ver figura 2.5). En el caso de la lámpara basta con plantear el equilibrio de fuerzas verticales. En el caso de la piedra sostenida por dos cables basta en general con el equilibrio de fuerzas verticales y el de momentos respecto a un punto cualquiera. Considérese una piedra sujeta por tres cables en vez de dos. En principio existen tres reacciones y, puesto que contamos con tres ecuaciones cartesianas de equilibrio, aparentemente el problema debiera tener solución. Pero no la tiene.

[16] Barbarismo que proviene del inglés. Sería preferible el vocablo castellano *discreción*, aunque suena raro en este contexto, por lo habitual que ya resulta el barbarismo. Alternativas a considerar son *despiece*, *despiezo* o *modelado*.

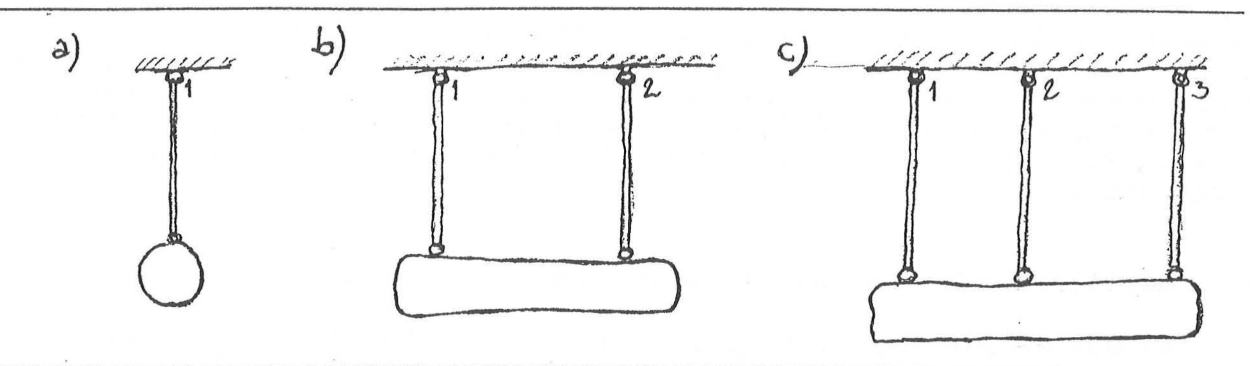


Figura 2.8: Estructuras isostáticas e hiperestáticas.

Tanto en el caso a como en el b de la figura 2.8, se están "usando" siempre las tres ecuaciones de equilibrio en el plano, aunque no lo parezca. En a, tanto el equilibrio de fuerzas horizontales (puesto que no hay) como el equilibrio de momentos (puesto que la única acción tiene la misma dirección que la única reacción) se cumplen siempre: las ecuaciones son *idénticamente nulas* y ni siquiera es necesario plantearlas. En b, sigue siendo idénticamente nula la ecuación de fuerzas horizontales, igual que ocurre en c, donde quedan sólo dos ecuaciones para tres reacciones desconocidas. El sistema así planteado tiene infinitas soluciones para el caso c.

Las estructuras a y b pertenecen a la categoría de *isostáticas*, mientras que la c es *hiperestática*. A estas dos categorías cabe añadir una tercera, la de aquellos cuerpos que no "llegan" a ser estructura, en el sentido en que aquí se emplea la palabra, y que bajo las acciones previstas se ponen en movimiento. Para ellos, lógicamente, las ecuaciones de equilibrio estático no tienen solución (hay menos reacciones desconocidas que ecuaciones, y al menos una de estas queda sin cumplirse). A tales cuerpos se les denomina propiamente *mecanismos*.[17] Estas tres categorías tienen cierta importancia como se verá. En particular, una estructura al romperse pasa a ser un mecanismo puesto que inicia un imparable movimiento. Justo antes, por tanto, debía ser isostática, incluso si al principio del proceso de carga era hiperestática.

Estas categorías deben ser vistas con precaución. Si para que un sistema mecánico sea un mecanismo basta que una fuerza arbitraria lo ponga en movimiento, ¿no son las tres estructuras de la figura 2.8 mecanismos? En efecto, basta considerar que existiera una fuerza horizontal para que cualquiera de ellas inicie un movimiento. Para evitar tener que denominarlas a todas mecanismos, resulta más útil establecer las categorías anteriores para el conjunto de acciones que se espera actúen alguna vez sobre la estructura, que hacerlo en general para un conjunto arbitrario de fuerzas.[18] En cualquier caso, conviene ser exigentes al analizar tanto la estabilidad como las acciones consideradas posibles de estas estructuras que "son y no son" mecanismos.

El hiperestatismo aparece en la estructura c al plantear el equilibrio global entre acciones y reacciones. En otras ocasiones, aunque

[17] *Estructuras hipostáticas*, por algunos autores.

[18] Sin embargo, todavía hoy, algunos autores insisten en el otro punto de vista, no exento de consecuencias prácticas: algunos programas de ordenador para análisis de estructuras no resuelven ninguno de los casos de la figura 2.8, avisando que se trata de mecanismos, ante la natural desesperación del que los usa.

globalmente la estructura sea isostática (pueden calcularse las reacciones, la sustentación es isostática) puede aparecer hiperestatismo al plantear el equilibrio parcial en algún corte: se habla entonces de hiperestatismo *interno*. En general se entenderá por estructura isostática aquella que lo es tanto externa (sustentación isostática) como internamente.

§2.5 Equilibrio de fuerzas en la rotura

Si una estructura al romperse pasa de isostática a mecanismo, las ecuaciones de equilibrio con fuerzas siempre tendrán una única solución justo antes de la rotura, y al menos se puede calcular el valor de las acciones que la producen.

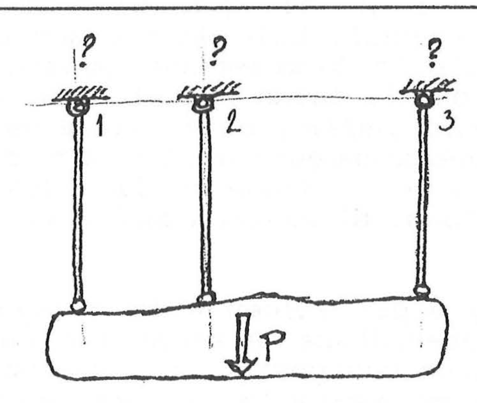


Figura 2.9: Piedra suspendida de tres cables paralelos.

Considérese el caso c anterior (ver figura 2.9) y supóngase que todos los cables se comportan según la ley elastoplástica: primero un período lineal con módulo de rigidez $\mathbf{E}$ y después un período de cedencia con módulo de rigidez nulo. Si el peso $\mathbf{P}$ aumenta lo suficiente, al menos uno de los cables (quizá todos) tendrá que soportar una fuerza normal igual a su máxima resistencia $\mathbf{N}_{u,i}$, de valor $\sigma_u \cdot \mathbf{A}_i$. La fuerza no puede ser mayor puesto que el cable no podría resistirla. Si el peso continua en aumento el cable cede, su deformación aumenta pero su solicitación permanece constante. Si esto ocurre en un número suficiente de cables se produce la rotura. Nótese que el *efecto matemático* de que un cable ceda, consiste en que desaparece la incógnita de fuerza correspondiente. Desde un punto de vista físico esto significa que la estructura pierde hiperestaticidad hasta convertirse en isostática, lo que sucede cuando sólo dos cables permanecen en el período lineal. Justo antes de la rotura, la fuerza normal en uno de ellos o en los dos también alcanza la máxima resistencia: cualquier aumento adicional de peso convierte a la estructura en un mecanismo que ya no muestra oposición al incremento de las acciones y se produce la rotura. En conclusión, justo antes de la rotura, de los tres cables de la figura 2.9, uno de ellos ha *plastificado*, otro esta a punto de comenzar a hacerlo y el tercero permanece en el período lineal. De los dos primeros se conoce su solicitación normal (igual a su máxima resistencia) y, por tanto, la reacción $\mathbf{R}_i$ en el enganche en el techo de cada uno de ellos, que será igual a la solicitación del cable correspondiente, $\mathbf{N}_{u,i}$. Por tanto todas las reacciones menos una (la del cable todavía en el período lineal) son conocidas. La reacción desconocida junto con el peso de la piedra que causa la rotura, $\mathbf{P}_u$, son las dos incógnitas del problema,

y pueden calcularse planteando el equilibrio global del conjunto, que permite escribir dos ecuaciones y, por tanto, un sistema resoluble. La única dificultad reside en que se desconoce *a priori* cual es el cable que cede primero y cual lo hace al final, es decir, en qué dos cables su solicitación ha alcanzado su capacidad resistente.

Si existieran cuatro cables, justo antes de la rotura, dos cables han cedido, un tercero esta a punto de comenzar a ceder y el cuarto permanece en el período lineal. Para **n** cables, **n**-2 se encuentran en el período de cedencia, uno en el límite elástico y otro en el período lineal. Sea cual sea el número de cables siempre hay dos incógnitas (la reacción del cable todavía en período elástico y la carga de rotura, P_u), y el sistema de ecuaciones resultante tiene solución. Como se desconoce cuál es el cable en período lineal, puede elegirse uno arbitrariamente, por ejemplo, el **a**. Entonces, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} P_u - N_a - \Sigma_{i\neq a} N_{u,i} &= 0 \\ N_a \cdot x_a + \Sigma_{i\neq a}(N_{u,i} \cdot x_i) &= 0 \end{aligned} \qquad [\ 3.5\ ]$$

habiéndose *tomado momentos* respecto al origen de coordenadas y habiéndose separado la solicitación desconocida del resto, véase la figura 2.10. La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} N_a &= - \Sigma_{i\neq a}(N_{u,i} \cdot x_i) / x_a \\ P_u &= \Sigma_{i\neq a} N_{u,i} + \Sigma_{i\neq a}(N_{u,i} \cdot x_i) / x_a \end{aligned} \qquad [\ 3.6\ ]$$

Si resulta ser $N_a \leq N_{u,a}$ efectivamente el cable **a** permanece todavía en período lineal. En caso contrario, la elección era equivocada. Debe entonces escogerse otro cable y repetir el proceso. En el peor de los casos después de probar cada uno de los **n** cables se habrá encontrado la solución.

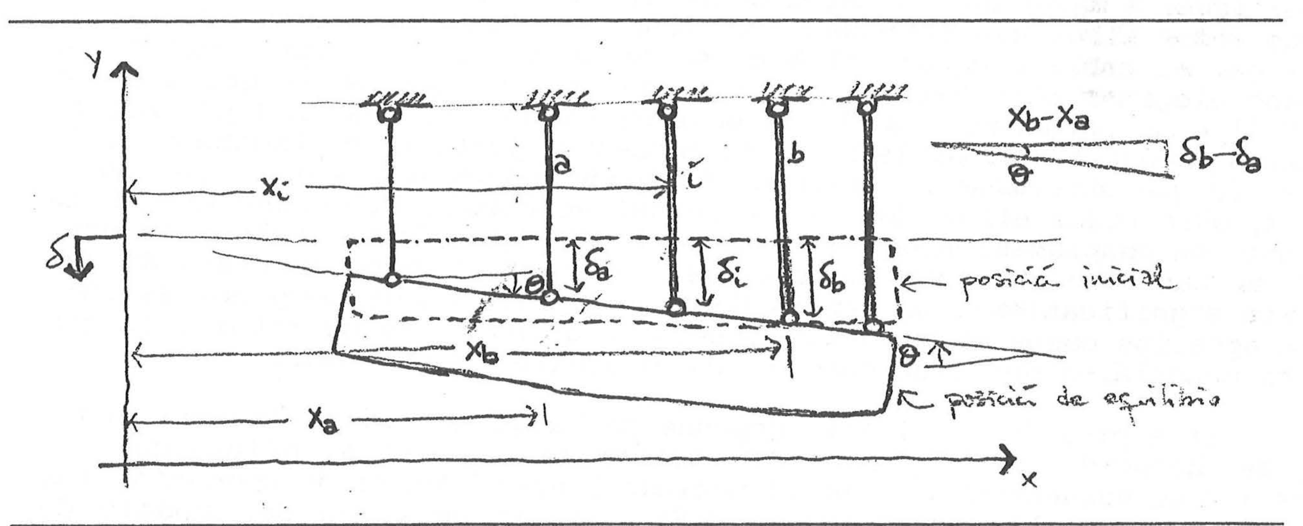


Figura 2.10: Posición de equilibrio de una piedra suspendida de n cables paralelos.

En todos los casos hay que comprobar además que ninguno de los cables que han alcanzado su tracción última a lo largo del proceso de carga se han roto antes de alcanzarse el valor P_u para la carga, por haber superado su deformación, ϵ_i, la de rotura, ϵ_u. Para ello, hay que determinar la posición de equilibrio justo antes de la rotura, determinar los alargamientos de cada cable y comprobar que en todos los casos $\epsilon_i \leq \epsilon_u$, véase la figura 2.10.

En el supuesto de que la piedra es *indeformable*, todas las posibles posiciones de equilibrio pueden describirse aproximadamente con dos únicos desplazamientos: una traslación vertical y un giro.

La traslación esta determinada por el cable que continúa en período elástico. Sea **a** dicho cable, $\mathbf{R}_a$ la reacción calculada en su enganche, $\mathbf{N}_a$ su solicitación, de valor $\mathbf{R}_a$ y, por tanto, $\mathbf{N}_a \leq \mathbf{N}_{u,a}$. Conocida su solicitación, su alargamiento se obtiene según la expresión general $\mathbf{N}/\mathbf{k}_{N\delta}$, es decir, $\delta_a = \mathbf{N}_a/(\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}_a/\mathbf{h}_a)$. La piedra habrá descendido por tanto ese mismo valor en ese punto.

Pero además, habrá girado un cierto ángulo θ alrededor de **a**, que esta determinado por el cable que se encuentra justamente en el límite elástico. De nuevo, no se sabe *a priori*, de cuál de los **n**-1 cables se trata. Elíjase uno arbitrario, por ejemplo el **b**. Su resistencia está determinada pues ha alcanzado su máxima; pero también se conoce su deformación que será la correspondiente al límite elástico, $\epsilon_e = \sigma_e/\mathbf{E}$. Por tanto, su alargamiento, δ_b, será $\mathbf{h}_b\cdot\epsilon_e$. En el supuesto de que la piedra es *indeformable*, si era recta al principio lo será también en la posición de equilibrio. Por tanto, los extremos de todos los cables se encontrarán en la recta que une los extremos de **a** y **b**. Tomando como origen de ordenadas la posición inicial de los extremos de los cables y considerando los alargamientos positivos, la ecuación de la recta **ab** es:

$$\delta_i = \delta_a + \tan(\theta)\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_a) \qquad [2.7]$$

en la que $\tan(\theta) = (\delta_b-\delta_a)/(\mathbf{x}_b-\mathbf{x}_a)$. Nótese que si los alargamientos son muy pequeños, $\tan(\theta) \approx \theta$ expresado en radianes.

La deformación de cualquiera de los otros cables, $\epsilon_i = \delta_i/\mathbf{h}_i$, debe ser igual o mayor que la deformación en el límite elástico, ϵ_e, puesto que todos ellos han alcanzado su máxima resistencia. Si no ocurre así es que el cable elegido, el **b** no se encuentra en el límite elástico. Debe elegirse otro hasta encontrar uno para el que verifique que con [2.7] $\epsilon_i \geq \epsilon_e$ para todo $\mathbf{i} \neq \mathbf{a}$. En el peor de los casos, tras **n**-1 pruebas se habrá encontrado el cable **b** que se encuentra justo en el límite elástico, lo que determina el valor de θ. Puede entonces comprobarse que $\epsilon_i \leq \epsilon_u$ para todos ellos. Si no ocurre así es porque la estructura se ha roto con desplazamientos menores que δ_a y θ, y el valor calculado para $\mathbf{P}_u$ es tan sólo una cota superior del valor real (pero se trata de una cota significativa). El requisito de seguridad puede comprobarse sólo en aquellos casos en que no se supera la deformación de rotura, lo que con materiales dúctiles como el acero ocurre casi siempre.[19]

La expresión [2.7] sólo depende de la geometría de la estructura y del hecho de que la piedra sea indeformable, en nada influye que los cables se encuentren o no en el período lineal o en el de cedencia. Por el contrario, las expresiones [2.5] y [2.6] dependen del modelo de comportamiento adoptado para el material y no son generales. El cálculo en rotura requiere de dos comprobaciones para asegurar la resistencia de la estructura: en primer lugar ha de comprobarse que la carga de rotura teórica, $\mathbf{P}_u$, es γ veces mayor que la acción $\mathbf{P}$; en segundo lugar, que la estructura puede alcanzar tal valor antes de romperse ($\epsilon_i \leq \epsilon_u$),

[19] De hecho, en la práctica, toda la comprobación de deformaciones no se realiza casi nunca, aunque se supere la deformación de rotura, porque el valor calculado para $\mathbf{P}_u$ suele ser sólo muy poco mayor que el real.

en otras palabras, que la *ductilidad* de la estructura es suficiente, lo que exige suficiente ductilidad *en todas y cada una* de sus partes.

Este método es impracticable si se emplea a ciegas: para **n** cables y si los cables **a** y **b** se encuentran en el último intento, se habrán estudiado 2·**n**-1 casos. Cierta intuición física permitiría aquí acertar en uno de los primeros intentos.

El equilibrio en la rotura junto a cierta intuición, son el único método viable en la práctica para analizar ciertos tipos estructurales bastante corrientes como las losas de hormigón. Incluso a pesar de que, en general, el *cálculo en rotura* sólo permite determinar una cota superior (aunque cercana) de la carga última de la estructura.[20]

Desafortunadamente, el análisis en rotura no dice nada acerca de los desplazamientos bajo el valor real de las acciones, magnitudes necesarias para comprobar la rigidez de la estructura.

§2.6 Ecuaciones de equilibrio con desplazamientos

El análisis del caso c de la figura 2.8 para cualquier valor de **P** no es posible si se considera que las magnitudes desconocidas son las reacciones, porque entonces hay más incógnitas que ecuaciones. Sin embargo, cualquiera que sea el *universo* que el lector sea capaz de imaginar, las ecuaciones de equilibrio representan la inexistencia de movimiento y el número de ecuaciones es siempre igual al de movimientos. Y a cada ecuación le corresponderá un desplazamiento hacia la posición de equilibrio en la que finaliza el movimiento (si se alcanza el equilibrio estático). Bastará considerar como incógnitas dichos desplazamientos para que el sistema de ecuaciones sea resoluble. Con esa simple consideración puede resolverse no sólo el caso c, también el problema general de una piedra colgada de **n** cables.

Puesto que en el plano sólo contamos con tres ecuaciones cartesianas de equilibrio deben existir sólo tres incógnitas reales en el problema general. Si suponemos la piedra *indeformable* (o con deformaciones mucho más pequeñas que las de los cables y, por tanto, despreciables), la posición de equilibrio, cualquiera que sea, puede definirse en función de los desplazamientos experimentados por el centro de gravedad de la piedra, que son tres: un desplazamiento vertical hacia abajo $\boldsymbol{\delta}$, un desplazamiento horizontal a izquierda o derecha y, por último, un giro $\boldsymbol{\theta}$ en el sentido de las agujas del reloj. Consideradas estas tres magnitudes como incógnitas del problema,[21] las ecuaciones de equilibrio siempre tienen solución. Antes de colgar la piedra, los **n** cables se encuentran en su posición inicial definida por el punto **i** del que cada uno cuelga del techo, y por su longitud inicial $\mathbf{l}_i$. Tras colgar la piedra, la estructura se desplaza ligeramente hasta alcanzar su posición de equilibrio.

---

[20] Esta proposición se conoce como *teorema del límite superior* o *teorema cinemático* en la jerga de las teorías de rotura o *cálculo plástico*.

[21] Este no es el único conjunto posible de tres incógnitas. Pueden adoptarse como incógnitas cualquiera otras tres magnitudes que determinen la posición de equilibrio. Las adoptadas aquí tienen ventajas evidentes al corresponderse con magnitudes físicas fácilmente reconocibles.

Si los desplazamientos y deformaciones son pequeños, los cables verticales inicialmente seguirán prácticamente verticales en la posición de equilibrio. Las fuerzas que puedan ejercer sobre la piedra tendrán también esa dirección igual que su propio peso, de modo que el equilibrio de fuerzas horizontales es una ecuación idénticamente nula y por ello no hace falta considerar el desplazamiento horizontal, que previsiblemente será insignificante: en este caso particular, la hipótesis de desplazamientos pequeños permite despreciar el horizontal.

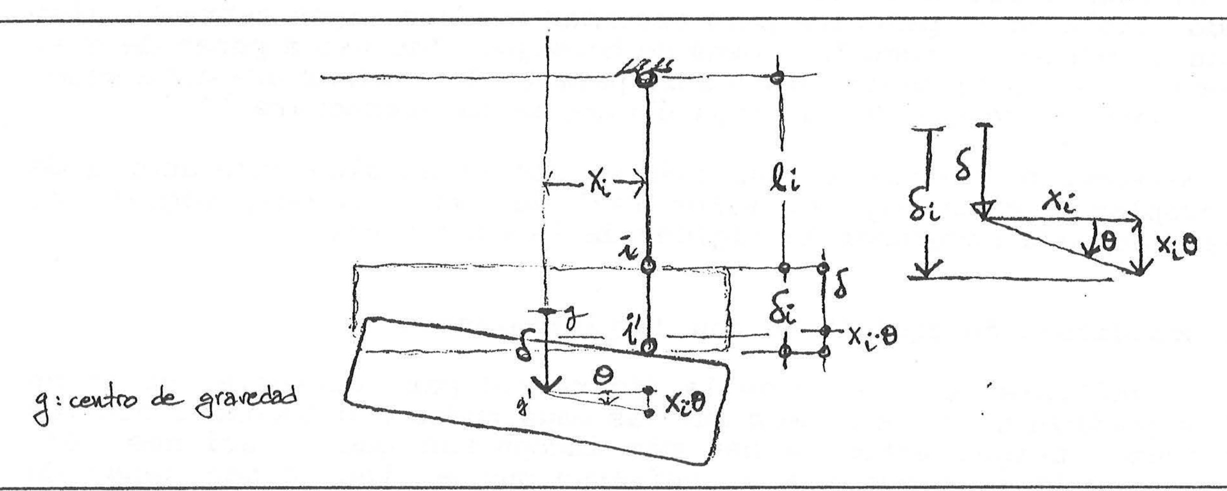


Figura 2.11: Alargamiento de un cable.

Si consideramos uno cualquiera de los cables, veáse la figura 2.11, entre su posición inicial y la de equilibrio habrá experimentado un cierto alargamiento δ_i, obligado por el desplazamiento y giro de la piedra, que puede expresarse en función de las incógnitas del problema:

$$\delta_i \approx \delta + x_i \cdot \tan(\theta) \approx \delta + x_i \cdot \theta \qquad [2.8]$$

en la cual, x_i es la distancia horizontal entre el cable **i** y el centro de gravedad de la piedra (positiva si el cable esta a la derecha), y en la que el giro θ debe expresarse en radianes para que la última expresión sea aproximadamente correcta, expresión semejante a la [2.7].

El alargamiento del cable corresponde a una deformación ϵ_i que vale δ_i/l_i y, en el supuesto de que no se supere el límite elástico del material, a una tensión $\sigma_i = \epsilon_i \cdot E_i$ y, por tanto, ejercerá fuerzas sobre la piedra y el techo de valor:

$$N_i \approx \epsilon_i \cdot E \cdot A_i = (E_i \cdot A_i / l_i) \cdot \delta_i = k_i \cdot \delta_i \qquad [2.9]$$

expresión tan aproximada como lo sea la ley lineal respecto al comportamiento real del material. Empleando aquí la [2.8] se obtiene:

$$N_i \approx k_i \cdot \delta + k_i \cdot x_i \cdot \theta \qquad [2.10]$$

El equilibrio de la piedra exige cualquiera de las formas de [2.2]. En este caso las [2.4] quedan:

$$P - \Sigma(N_i) = 0 \qquad [2.11]$$
$$\Sigma(N_i \cdot x_i) = 0$$

en la que **P**, el peso de la piedra, es conocido. Así escrito, el sistema solo tiene solución si **n**<3, pero usando [2.10] y aislando las incógnitas en uno de los miembros:

$$\Sigma(\mathbf{k}_i)\cdot\delta + \Sigma(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x}_i)\cdot\theta \approx \mathbf{P}$$
$$\Sigma(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x}_i)\cdot\delta + \Sigma(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x}_i^2)\cdot\theta \approx 0 \qquad [2.12]$$

sistema que siempre tiene solución. Encontrados los valores de los desplazamientos de la piedra, δ y θ, hay que verificar que la posición de equilibrio es válida, es decir, que se cumple toda la "cascada" de hipótesis necesarias para que las [2.12] sean aplicables:

indeformabilidad de la piedra,
valores pequeños de los desplazamientos,
validez de la ley de Hooke,
tensiones menores que el límite elástico de cada cable,
inexistencia de acciones horizontales.

Si la solución es válida, puede comprobarse los requisitos de resistencia y rigidez. Para todo ello se emplean las expresiones [2.8] que permiten obtener el alargamiento de cada cable y, por tanto, su deformación unitaria bajo la carga **P**, y comprobar si todos los alargamientos son pequeños (validez de la solución), si son menores que los máximos valores permitidos por los requisitos de rigidez, si la deformación es menor que la deformación en el límite elástico (validez de la solución para ese cable) y si es menor que la *deformación segura* ϵ_f (seguridad del cable).[22]

Las relaciones [2.8] se denominan *ecuaciones de compatibilidad* y expresan las condiciones de *coherencia geométrica* de un cable sin romper: puntos del cable inicialmente contiguos siguen contiguos tras la deformación pero más o menos separados que al principio. Se trata de expresiones cuya validez solo exige desplazamientos pequeños en relación a las dimensiones de la geometría de la estructura. Las relaciones [2.9] expresan el comportamiento lineal del cable (la parte proporcional de la ley carga-alargamiento) y su validez exige la validez de la ley de Hooke. Las relaciones [2.11] son las ecuaciones de equilibrio con fuerzas, válidas siempre.

El razonamiento seguido para llegar a escribir las ecuaciones de equilibrio con desplazamientos, ecuaciones [2.12], puede emplearse para cualquier tipo de estructura y material, estando su validez restringida únicamente por las hipótesis que en cada caso se empleen para establecer las [2.8] y las [2.9]. Este método de análisis, aplicable siempre, se denomina por ello *método universal*, y no es sino un caso particular de un método matemático útil para resolver gran cantidad de problemas físicos, *el método de los elementos finitos*.

---

[22] Conviene recordar que la seguridad de la estructura no exige la seguridad de cada uno de los cables considerados aisladamente. Esta última condición es más exigente que el criterio estricto que se expresa en la forma $\gamma\cdot\mathbf{P} \le \mathbf{P}_u$. Si en el cálculo en rotura puede sobreestimarse la capacidad resistente de la estructura, en el cálculo elástico puede subestimarse. El *calculo no lineal*, que permite pasar paulatinamente de la situación elástica a la de rotura, ofrece lo mejor de ambos mundos pero queda fuera del alcance de este texto.

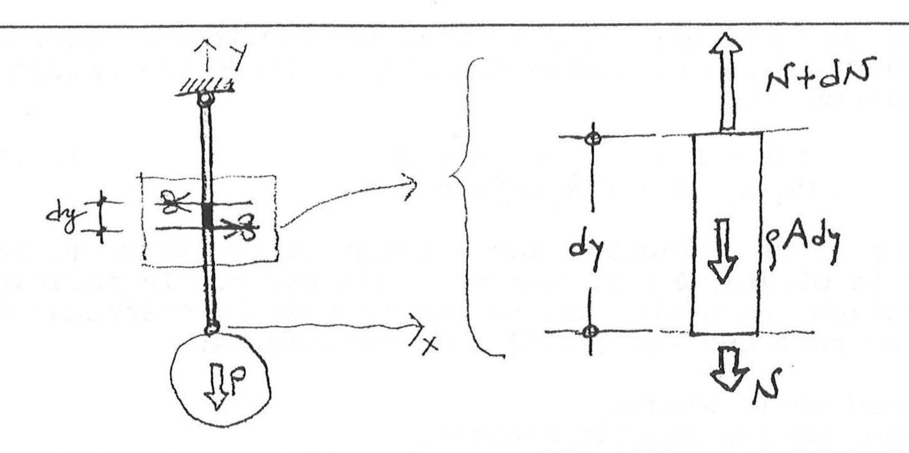


Figura 2.12: Equilibrio local alrededor de un punto.

§2.7 Ecuaciones de equilibrio en forma diferencial

Considérese el trozo de cable de la figura 2.12, sometido a la única acción de su propio peso. El trozo considerado es tan pequeño como se quiera, de longitud **dy**. Si el peso específico del material del que esta hecho es ρ, el peso del trozo es $\rho \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{dy}$, siendo **A** el área transversal a lo largo de ese trozo (se puede suponer el área constante dada la pequeñez de **dy**). La única posibilidad de equilibrio es que la solicitación normal del cable, **N**, tenga distinto valor en uno y otro extremo, es decir valores diferentes en una cierta cantidad **dN**. El equilibrio vertical de fuerzas exige en este caso:

$$\mathbf{N} + \rho \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{dy} - (\mathbf{N} + \mathbf{dN}) = 0 \quad \therefore \quad \rho \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{dy} = \mathbf{dN} \qquad [2.13]$$

ecuación diferencial que es trivial si el área no varía con la altura, teniendo por *solución general* en ese caso $\mathbf{N} = \rho \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathrm{cte}$; si además en el extremo inferior existe un peso **P**, habrá que cumplir con *las condiciones en el contorno*, obteniéndose la *solución particular*:

$$\mathbf{N} = \rho \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{P} \qquad [2.14]$$

Si, como se ha venido considerando hasta ahora, $\rho \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$ es despreciable frente a **P**, la conclusión es la ya obtenida con anterioridad, $\mathbf{N} = \mathbf{P}$.

La aparente trivialidad de [2.13] desaparece en cuanto la geometría o la descripción del problema se complica, llegando al caso de que la solución integral sea algebráicamente imposible, teniendo que recurrirse a su integración numérica. Considérese, como ejemplo, el problema de *calcular* la forma de un cable que, sometido exclusivamente a la acción de su propio peso, tenga la misma tensión normal media en toda su longitud. Para que esto ocurra, el área en cada sección habrá de ser igual a $\mathbf{N}/\sigma$, y la [2.13] se transforma en:

$$\rho \cdot (\mathbf{N}/\sigma) \cdot \mathrm{dy} = \mathbf{dN} \qquad [2.15]$$

cuya solución general es $\mathbf{N} = \exp(\rho \cdot \mathbf{y}/\sigma) + \mathrm{cte}$. El área del cable variará con **y**, según $\mathbf{A} = \exp(\rho \cdot \mathbf{y}/\sigma)/\sigma$. Si la sección es un círculo, el perfil del cable es el de la figura 2.13. Se pueden encontrar en la literatura una gran cantidad de *pasatiempos matemáticos* semejantes.

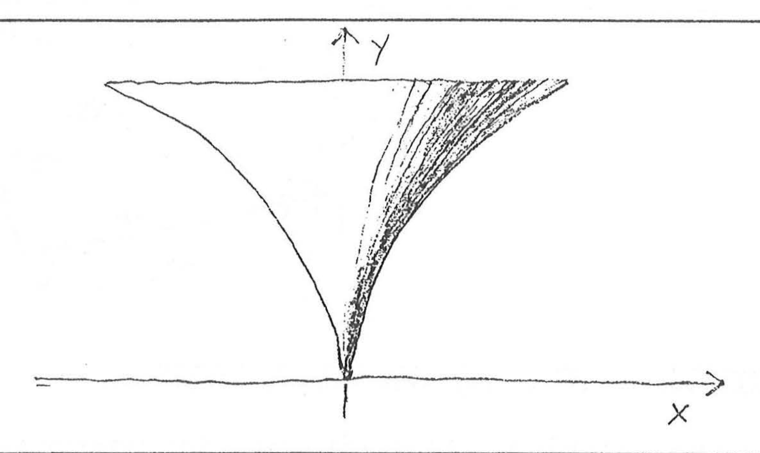


Figura 2.13: Perfil de un cable sometido a su propio peso con tensión media constante.

La expresión [2.13] no es sino la "versión" diferencial de la segunda de las [2.4]. Desde un punto de vista abstracto, el trozo de estructura más pequeño que siempre puede considerarse es el *punto*. Alrededor del punto, en un entorno infinitesimal, puede considerarse el *equilibrio local*, planteando las ecuaciones de equilibrio en cualquiera de las formas anteriormente descritas, obteniéndose versiones de la misma ecuación en su forma diferencial. Las fuerzas y los desplazamientos no son ahora vectores sino funciones vectoriales. Si las ecuaciones diferenciales así obtenidas pueden resolverse, la solución que además cumpla con las *condiciones de contorno* (valores prefijados de las acciones y valores de los desplazamientos en los vínculos de la estructura) consistirá en funciones de fuerza o desplazamiento con valor definido en todos y cada uno de los puntos de la estructura. Como quiera que toda estructura (cualquiera que sea su tipo, tamaño, etc), puede describirse como un conjunto de puntos, la versión diferencial de las ecuaciones de equilibrio permite formular el análisis de estructuras con absoluta generalidad. El recurso a la integración numérica mediante máquinas de cálculo permite incluso su uso práctico a condición de que la descripción geométrica de los dominios de integración (el modelo de la estructura) sea susceptible de ser interpretada por un programa de ordenador a un coste razonable.

§3.8 Fuerzas y desplazamientos. Trabajo

Existe una serie de correlaciones bastante evidentes entre fuerzas y desplazamientos. Una fuerza puede producir todo tipo de desplazamientos, al igual que un desplazamiento puede ser producido por todo tipo de fuerzas. Esa serie de correlaciones son a veces "simétricas" y otras, como se verá, "antisimétricas".

Al igual que las fuerzas, los desplazamientos pueden representarse vectorialmente. La traslación se representa mediante un vector de igual dirección y sentido, el desplazamiento $\{\boldsymbol{\delta}\}$. La rotación mediante un vector cuya dirección es el eje de rotación y con el sentido apropiado según la "mano" elegida para llevar las cuentas, el vector giro $\{\boldsymbol{\theta}\}$. Una rotación produce traslaciones de los puntos no situados sobre el eje, tanto mayores cuanto más lejos está el punto, veasé figura 2.14, de modo que el desplazamiento producido en un punto **i** por un giro alrededor de un eje que pasa por **A** valdrá:

$$\{\boldsymbol{\delta}_{iA}\} = \{\mathbf{d}_{iA}\} \times \{\boldsymbol{\theta}_{A}\}$$

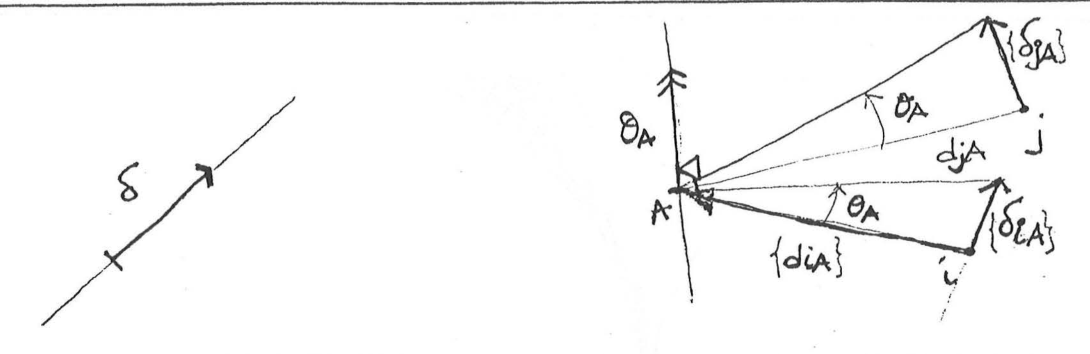


Figura 2.14: Definición vectorial de desplazamientos y giros.

expresión formalmente idéntica a la definición del momento de una fuerza, pero en la que el papel del momento lo juega el desplazamiento, y el de la fuerza, el giro.

Fuerza y desplazamiento pueden "fundirse" en una única magnitud que además pierde su carácter vectorial para convertirse en escalar: el trabajo.

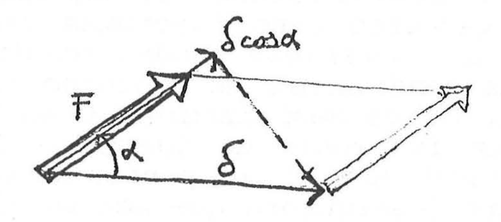


Figura 2.15: Trabajo de una fuerza.

La definición vectorial de trabajo de una fuerza **F** que se desplaza una cierta distancia **δ** es el producto escalar de ambos vectores:

$$W = \{\mathbf{F}\}\cdot\{\boldsymbol{\delta}\} = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\delta}\cdot\cos(\alpha) \qquad [2.15]$$

en la que α es el ángulo que forman. El valor $\boldsymbol{\delta}\cdot\cos(\alpha)$ no es sino la componente de **δ** en la dirección de **F**. El trabajo resulta ser entonces simplemente el producto del valor de la fuerza por lo que se desplaza *en su propia* dirección.

Si el desplazamiento esta causado por una rotación el trabajo de la fuerza es igual al producto escalar del momento de la fuerza respecto al eje de rotación, por el giro:[23]

$$W = \{\mathbf{F}\}\cdot\{\boldsymbol{\delta}_{iA}\} = \{\mathbf{F}\}\cdot\{\mathbf{d}_{iA}\}\times\{\boldsymbol{\theta}_A\} = \{\mathbf{F}\}\times\{\mathbf{d}_{iA}\}\cdot\{\boldsymbol{\theta}_A\} = \{\mathbf{M}_{Ai}\}\cdot\{\boldsymbol{\theta}_A\}$$

y, por tanto, puede definirse análogamente el trabajo de un par de fuerzas que gira un cierto ángulo **θ** como:

[23] Recuérdese que el producto mixto de tres vectores **a**, **b** y **c**, se define como $\{\mathbf{a}\}\cdot\{\mathbf{b}\}\times\{\mathbf{c}\}$ o, indistintamente, como $\{\mathbf{a}\}\times\{\mathbf{b}\}\cdot\{\mathbf{c}\}$; también que el producto vectorial es anticonmutativo, $\{\mathbf{a}\}\times\{\mathbf{b}\} = \{-\mathbf{b}\}\times\{\mathbf{a}\}$.

equilibrio estático

$$W = \{\mathbf{M}\}\cdot\{\boldsymbol{\theta}\} = \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\cos(\alpha) \qquad [2.16]$$

en la que de nuevo α es el ángulo que forman ambos vectores, y el valor $\theta\cdot\cos(\alpha)$ puede interpretarse como la proyección del giro en la dirección del momento del par.

El trabajo total de un conjunto de fuerzas es naturalmente la suma de sus trabajos cualquiera que sea el movimiento.

§2.9 Principio de los trabajos virtuales

A partir de las definiciones anteriores puede obtenerse una nueva expresión del equilibrio estático con alguna ventaja respecto a las anteriores, pues se tratar de una representación *escalar* (no *vectorial*) del equilibrio.

Consideremos un conjunto de fuerzas **F** actuando sobre una estructura en la posición de equilibrio. Para alcanzar tal posición cada punto de la estructura, y en particular los puntos de aplicación de las fuerzas, habrán experimentado desplazamientos **a**. Si la estructura está en equilibrio, la resultante del conjunto de fuerzas y su momento respecto a cualquier punto son vectores nulos. Si se pudiera desplazar el conjunto apartándolo arbitrariamente de su posición de equilibrio sin ejercer ninguna fuerza sobre él (cosa que *nunca* puede hacerse realmente, pero *siempre* imaginariamente), el trabajo total debe ser nulo puesto que una fuerza nula no produce trabajo. Al desplazar el conjunto una cierta distancia $\boldsymbol{\delta}$ se obtiene una ecuación análoga a la primera de las [2.2]. Al girar el conjunto un cierto ángulo $\boldsymbol{\theta}$ respecto a un centro de rotación A, una análoga a la segunda:

$$\begin{aligned} W_\delta &= \{\mathbf{F}_R\}\cdot\{\boldsymbol{\delta}\} = (\ \Sigma\{\mathbf{F}_i\}\ )\cdot\{\boldsymbol{\delta}\} = 0 \\ W_\theta &= \{\mathbf{M}_{AR}\}\cdot\{\boldsymbol{\theta}\} = (\ \Sigma\{\mathbf{M}_{Ai}\}\ )\cdot\{\boldsymbol{\theta}\} = 0 \end{aligned} \qquad [2.17]$$

Los desplazamientos que se ejercen imaginariamente sobre el conjunto de fuerzas no deben confundirse con los desplazamientos experimentados por la estructura para alcanzar su posición de equilibrio, se trata de desplazamientos adicionales imaginarios, por ello se denominan *desplazamientos virtuales* y al trabajo desarrollado por el conjunto al experimentarlos, *trabajo virtual*. El *principio de los trabajos virtuales* puede enunciarse entonces diciendo que un conjunto de fuerzas está en equilibrio si el trabajo virtual realizado al experimentar un desplazamiento virtual arbitrario es nulo.

Como siempre, las [2.17] son las [2.2] escritas de otra manera. Y son útiles en aquellos problemas en que es más fácil calcular el trabajo que calcular momentos. Desde un punto de vista teórico tienen la ventaja de ser las dos formalmente idénticas: sumas de productos escalares entre términos de fuerza (fuerza o momento) y términos de desplazamiento (desplazamiento o giro), permitiendo manejar todos las variables involucradas en el análisis de un modo unificado. Para resaltar este hecho, se usará el término de *fuerza generalizada* **r** -o fuerza a secas cuando no haya dudas- para referirnos indistintamente a fuerzas o momentos. Análogamente, usaremos el término de *desplazamiento generalizado* **a**. Además, para resaltar el hecho de que los desplazamientos **a** en las [2.17] son virtuales, les antepondremos el operador simbólico δ, reservando el símbolo **a** para los desplazamientos (desplazamientos o giros indistintamente) que realmente experimenta la estructura para

alcanzar su posición de equilibrio. Las [2.17], con esta notación, se escriben de idéntica forma:

$$\delta \mathbf{W} = \Sigma\{\mathbf{r}_i\}\cdot\{\delta \mathbf{a}\} = 0 \qquad [\ 3.18\ ]$$

Transformadas en forma cartesiana, y puesto que cada fuerza sólo da trabajo debido al desplazamiento en su dirección, en el espacio se podrán escribir seis ecuaciones de la forma general $\Sigma \mathbf{r}_i \cdot \delta \mathbf{a} = 0$, tres en el plano. Puesto que el principio de los trabajos virtuales exige la arbitrariedad del movimiento, los seis (tres) desplazamientos virtuales pueden escogerse con la única condición de ser linealmente independientes. De lo contrario, una de las ecuaciones será combinación lineal de alguna de las otras y el sistema resultante no tendrá solución.

Como en el caso de las ecuaciones con fuerzas, las ecuaciones con desplazamientos virtuales pueden aplicarse globalmente a toda la estructura o a cualquier parte de la misma resultante de un corte.

El principio de los trabajos virtuales deriva directamente de la definición vectorial del equilibrio y es válido siempre. Puede demostrarse que el principio de la mínima energía potencial deriva de él en el caso particular en que se conoce como varía la energía potencial de deformación. El esquema de la demostración es conceptualmente simple: si en el equilibrio la energía potencial total es mínima, su variación en posiciones diferencialmente próximas será nula. La variación de la energía potencial *es* el trabajo virtual bajo un conjunto arbitrario de desplzamientos virtuales sobre la posición de equilibrio, que no son sino los desplazamientos diferenciales.

NOTAS HISTÓRICAS Y BIBLIOGRÁFICAS

Un resumen de la historia de la estática en orden cronológico ha de seguir el orden inverso usado en el texto. Arquímedes representa la cima de la estática griega: *el principio de Arquímedes* acerca de los cuerpos sumergidos muestra que era entendido el equilibrio de fuerzas, y las leyes de la palanca, el equilibrio de momentos. Era esta ecuación la que contaba con más predicamento y la que fue más profusamente utilizada. Pero no parece que, en general, se tuviera conciencia de que ambas ecuaciones debían cumplirse simultáneamente. Esta ambigüedad, que provocó un sinfín de errores famosos —incluyendo uno de Galileo—, duró hasta los tiempos de Parent (1666-1716) y Coulomb.

El principio de los desplazamientos (trabajos) virtuales fue cabalmente establecido, probablemente en el siglo XIII, por un tal Jordanus Nemorarius a quien se atribuye el manuscrito copiado en *Elementa Jordani super demonstrationem ponderis* de 1464. A través de los escolásticos debió ser conocido por Leonardo, quien lo emplea ya con soltura. Hasta Johann Bernouilli (s. XVIII) no adopta su forma actual, pues con anterioridad a él e, incluso, en autores posteriores, tras las palabras *potencia, resistencia, empuje, momento* o *fuerza,* no siempre se encontraba el mismo concepto que empleamos ahora sino otros que como el *esfuerzo,* en la acepción coloquial de lo que cuesta hacer algo, se referían vagamente al trabajo o a la energía. Fue Newton quien en este sentido adoptó como principio que la Naturaleza actuaba siempre según *el camino más corto* o *del mínimo esfuerzo.* Una vez que estuvo disponible el cálculo de variaciones de Euler, que permitía minimizar o maximizar cualquier magnitud, la aplicación de tales principios en las ecuaciones diferenciales se convirtió en materia esencial para la formación de los científicos.

Las ecuaciones de equilibrio con desplazamientos (el método universal) fueron puestas a punto por Navier (ca. 1864). Con anterioridad a él, se pueden encontrar las creencias y métodos de análisis más exóticos para las estructuras hiperestáticas junto al cálculo en rotura, empleado desde Galileo como único camino posible para enfrentar los más diversos problemas de cálculo de arcos y bóvedas.

Las nociones de *corte, fuerza interior* y *solicitación* no se establecieron con claridad hasta Cauchy (1822); con anterioridad y desde antiguo se intentaba establecer

el equilibrio global de cada objeto considerado siempre como un todo, sin que hubiera acuerdo en como explicar que lo aplicable al todo lo fuera también a la parte, origen de famosas e intrincadas controversias entre los escolásticos en las que, por discutirse temas zanjados por los dogmas de la Iglesia Católica, intervino en ocasiones la mano de la Inquisición.

Las ecuaciones cartesianas fueron establecidas por Navier. Sus antecesores se ocuparon siempre de problemas de gravedad con lo cual la dirección vertical era preponderante y la horizontal sólo era tomada en consideración a veces. En todo caso, las coordenadas *cartesianas* no fueron inventadas por Descartes —quien inventó las oblicuas— sino por Oresme en 1362, quien uso las coordenadas de la geografía griega, en el sentido actual, para representar funciones y diagramas.

Y más sorprendente aún, las ecuaciones vectoriales fueron escritas independientemente por Josiah W. Gibbs y Oliver Heaviside en... ¡1901! y ¡1893!, respectivamente, tras importantes aportaciones de Hamilton, Maxwell y Grassman. Ello a pesar de que la noción de vector era empleada por los griegos —la ley de composición de velocidades (la ley del paralelogramo) es atribuida a Aristóteles—, y de que las primeras propuestas sobre estática gráfica aparecen en el *Traité de Méchanique* de Lahire (1695), quien dibujaba las fuerzas como segmentos pero sin la característica flecha que hoy en día permite reconocer a los vectores.

Ya se comprende la importancia que la estática tiene para el diseño de estructuras. Sin su concurso ningún problema puede resolverse y un buen número de ellos puede resolverse sólo con la consideración del equilibrio. Pueden hacerse consultas adicionales o alternativas a las de este texto en *Teoría de estructuras*, Stephen P. Timoshenko y D. H. Young, Bilbao: Urmo, 1983; *Mecánica de materiales*, Stephen P. Timoshenko ý James M. Gere, México: UTEHA, 1974; *Statics of deformable solids*, Raymond L. Bisplinghoff y otros, New York: Dover Publications, 1990.

NOTAS

CUADERNO

2.02

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

